共通テスト対策講座 数学ＩＡ

この講座は,「大学入学共通テスト 試行調査 数学ＩＡ」および「令和２年度大学入試センター試験 数学ＩＡ」をベースに，大学入学共通テスト 数学ＩＡで問われる資質・能力がどんなものかを感じ取り，その後の学習に活かしていただくための講座です。

大学入学共通テストの前身であるセンター試験の数学は，問題の設定を理解し，誘導の流れや意図を把握しながら解き進め，そのプロセスおよび結果をマークすることで，大学教育の基礎となる知識・技能や，思考力・判断力・表現力を見る試験でした。別解が他に存在したとしても，限られた時間内にその流れを理解し，正確に計算し，時には立ち止まって整理し，解答に行き着き，マークまでを終える必要があるこのセンター試験の数学に関しては，記述力がある人でも点数がとれない，ということが起こり得る，そんな試験でした。

大学入学共通テストの数学においても，センター試験における出題のねらいを踏襲しつつ，さらに会話で問題を解き進めるプロセスを追体験したり，日常生活に紐付く題材を数学で解決する等，高等学校における「学びの場面」を意識した出題が含まれ，それを「試行試験」を通じて体験することができます。知識や解き方を知っているか，ではなく，その場で問題の中で展開される「初めて見る場面・設定」においても，それまでの学びで得た経験を活かしながら，基本的な知識・技能を適切に活用して解きほぐしていく，そんな力が求められます。まずは，ご紹介している問題を通じて，一緒にそれを解釈していきましょう。

最後に。この講座だけを受講すればよいのではありません。この講座で身につけた数学的な見方・考え方を，センター試験の過去問や，共通テスト向けの問題集，さらには記述式の問題集を解く際に役立てていくことにより，大学入学共通テストで問われる資質・能力がさらに養われていくでしょう。講座の受講は，始まりにすぎません。そして，その始まりは，あなたの輝かしい未来に続く道の歩みの始まりでもあります。何かを見失いそうになったとき，またこの講座に戻ってきてください。いつでも，何度でも，あなたに身につけてほしい観点を語りかけます。

山内 恵介

目　次

第１講　数学Ⅰ 小問集合 …… p2
第２講　２次関数 …… p10
第３講　図形と計量 …… p18
第４講　データの分析 …… p32
第５講　場合の数と確率 …… p50
第６講　整数の性質 …… p60
第７講　図形の性質 …… p70
第８講　実践演習問題 第１問 …… p82
第９講　実践演習問題 第２問 …… p88
第10講　実践演習問題 第３問～第５問 …… p94

はじめに　受講の仕方・予習復習の仕方

① 予習について

講座の受講前に「講義問題」を解いてください。1～3の３問構成です。まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう。特に時間を計る必要はありません。予習をすることで自分の注力して見るべきポイントがわかった状態を作る，これが講義を受ける前に必要な準備です。予習ですべて解けている必要はございません。

② 講義について

予習が完了した状態で，授業動画を見ていただき，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。その際には，予習で整理した「注力して見るべきポイント」に集中しながら，また自分の解法との「差違」を感じながら受講しましょう。

③ 復習について

授業で扱ったポイントを頭に描きながら，まずは問題をもう一度解いてみましょう。予習での自分のやり方に満足できた部分はさらなるスピードアップを，できなかったところや新たな観点を身につけたところはそれを確かめるようにゆっくりと。また，忘れてしまった場合はもう一度講義を見直しましょう。そのようにして，ある大問を最後まで解ききったとき，その大問があなたにどんな資質・能力を要求したのかを，解答全体を見て確認しておきましょう。

そして二回目以降は，できる限り「最高速度」で問題を解いてみましょう。さらに，大問を必ず最後まで通してみましょう。すでに自分でじっくり取り組んだ問題ですので，その流れを追うことでより理解が深まり，また速度と正確性を上げる練習を行うことができます。

④ 講座受講後

講座受講後は，大学入学共通テストを題材として扱う市販の問題集に取り組むとよいでしょう。その場合については，上記①～③と同じように，問題と解くところから復習までじっくり取り組むとよいでしょう。また，「設定や条件を理解し，誘導の流れをつかみ，マークに合わせて解答する」という観点を身につける

には，センター試験の過去問題に取り組むことも効果的です。ただし解くだけに留まらず，大問１問を通じてどのような流れで構成されているのかを，復習時に理解し，くり返し問題に取り組む際にはその流れを意識するとよいでしょう。

第１講　数学Ⅰ 小問集合

1〔１〕 a を定数とする。

(1) 直線 ℓ : $y=(a^2-2a-8)x+a$ の傾きが負となるのは，a の値の範囲が

$\boxed{\text{アイ}}<a<\boxed{\text{ウ}}$

のときである。

(2) $a^2-2a-8\neq 0$ とし，(1)の直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を b とする。

$a>0$ の場合，$b>0$ となるのは $\boxed{\text{エ}}<a<\boxed{\text{オ}}$ のときである。

$a\leqq 0$ の場合，$b>0$ となるのは $a<\boxed{\text{カキ}}$ のときである。

また，$a=\sqrt{3}$ のとき

$$b=\frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

〔2〕 c を定数とする。2次関数 $y=x^2$ のグラフを，2点 $(c,\ 0)$，$(c+4,\ 0)$ を通るように平行移動して得られるグラフを G とする。

(1) G をグラフにもつ2次関数は，c を用いて

$$y=x^2-2\left(c+\boxed{\text{ア}}\right)x+c\left(c+\boxed{\text{イ}}\right)$$

と表せる。

2点 $(3,\ 0)$，$(3,\ -3)$ を両端とする線分と G が共有点をもつような c の値の範囲は

$$-\boxed{\text{ウ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{エ}},\quad \boxed{\text{オ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{カ}}$$

である。

(2) $\boxed{\text{オ}}\leqq c\leqq\boxed{\text{カ}}$ の場合を考える。G が点 $(3,\ -1)$ を通るとき，G は2次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$ だけ平行移動したものである。また，このとき G と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

2　△ABC において，$BC=2\sqrt{2}$ とする。∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ とする。このとき，BD＝ ア であり

$$\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。$\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから

AD＝ カ

である。また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

＜ NOTE ＞

3 〔1〕 自然数 n に関する三つの条件 p, q, r を次のように定める。

p：n は 4 の倍数である

q：n は 6 の倍数である

r：n は 24 の倍数である

条件 p, q, r の否定をそれぞれ $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P, Q, R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ で表す。

(1) 次の [ア] に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

$32 \in$ [ア] である。

⓪ $P \cap Q \cap R$	① $P \cap Q \cap \overline{R}$	② $P \cap \overline{Q}$
③ $\overline{P} \cap Q$	④ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap R$	⑤ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$

(3〔1〕は次ページに続く。)

(2) 次の [エ] に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは [イウ] である。
また，[イウ] [エ] R である。

⓪ $=$　① $\subset$　② $\supset$　③ $\in$　④ $\notin$

(3) 次の [オ] に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

自然数 [イウ] は，命題 [オ] の反例である。

⓪ 「(p かつ q) $\Longrightarrow \overline{r}$」　① 「($p$ または q) $\Longrightarrow \overline{r}$」
② 「$r \Longrightarrow$ (p かつ q)」　③ 「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」

〔2〕 有理数全体の集合を A，無理数全体の集合を B とし，空集合を $\varnothing$ と表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 「集合 A と集合 B の共通部分は空集合である」という命題を，記号を用いて表すと次のようになる。

$$A \cap B = \varnothing$$

「1のみを要素にもつ集合は集合 A の部分集合である」という命題を，記号を用いて表せ。

(2) 命題「$x \in B$，$y \in B$ ならば，$x+y \in B$ である」が偽であることを示すための反例となる x，y の組を，次の⓪～⑤のうちから二つ選べ。必要ならば，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい。ただし，解答の順序は問わない。

[ア]，[イ]

⓪ $x=\sqrt{2}$，$y=0$

① $x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$

② $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{2}-1$

③ $x=\sqrt{4}$，$y=-\sqrt{4}$

④ $x=\sqrt{8}$，$y=1-2\sqrt{2}$

⑤ $x=\sqrt{2}-2$，$y=\sqrt{2}+2$

＜ NOTE ＞

第２講　２次関数

[1]　関数 $f(x)=a(x-p)^2+q$ について，$y=f(x)$ のグラフをコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて表示させる。

このソフトでは，a，p，q の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，それぞれの [　　] の下にある●を左に動かすと値が減少し，右に動かすと値が増加するようになっており，値の変化に応じて関数のグラフが画面上で変化する仕組みになっている。

最初に，a，p，q をある値に定めたところ，図１のように，x 軸の負の部分と２点で交わる下に凸の放物線が表示された。

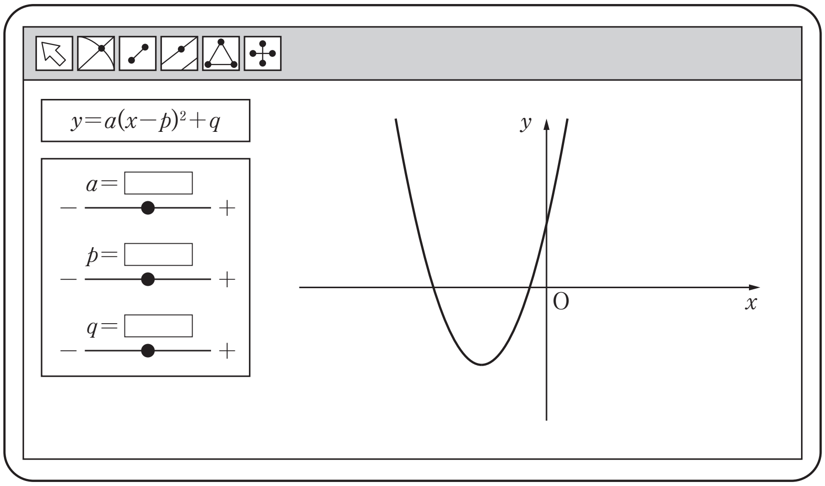


図１

(1)　図１の放物線を表示させる a，p，q の値に対して，方程式 $f(x)=0$ の解について正しく記述したものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。[ア]

⓪　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの正の解をもつ。

①　方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの負の解をもつ。

②　方程式 $f(x)=0$ は正の解と負の解をもつ。

③　方程式 $f(x)=0$ は重解をもつ。

④　方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたない。

（[1]は次ページに続く。）

(2)　次の操作A，操作P，操作Qのうち，いずれか一つの操作を行い，不等式 $f(x)>0$ の解を考える。

操作A：図1の状態から p，q の値は変えず，a の値だけを変化させる。
操作P：図1の状態から a，q の値は変えず，p の値だけを変化させる。
操作Q：図1の状態から a，p の値は変えず，q の値だけを変化させる。

このとき，操作A，操作P，操作Qのうち，「不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数となること」が起こり得る操作は［イ］。また，「不等式 $f(x)>0$ の解がないこと」が起こり得る操作は［ウ］。

［イ］，［ウ］に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　ない
①　操作Aだけである
②　操作Pだけである
③　操作Qだけである
④　操作Aと操作Pだけである
⑤　操作Aと操作Qだけである
⑥　操作Pと操作Qだけである
⑦　操作Aと操作Pと操作Qのすべてである

2　数学の授業で，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。

このソフトでは，図1の画面上の [A]，[B]，[C] にそれぞれ係数 a, b, c の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，[A]，[B]，[C] それぞれの下にある●を左に動かすと係数の値が減少し，右に動かすと係数の値が増加するようになっており，値の変化に応じて2次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。

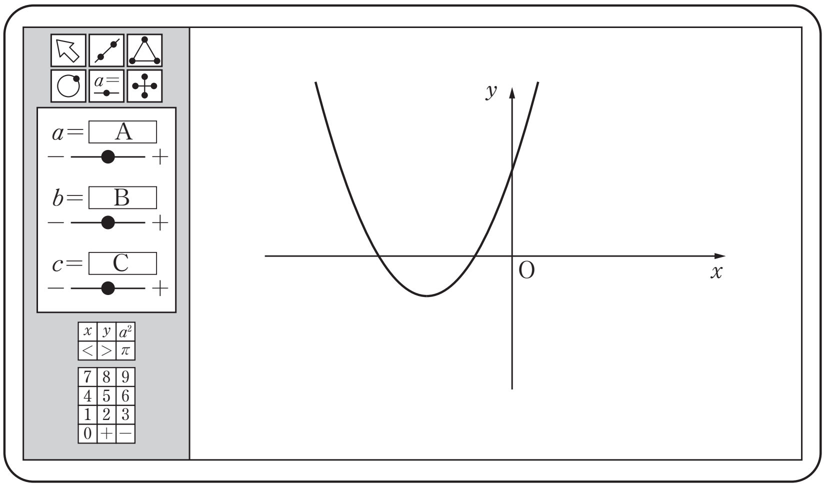
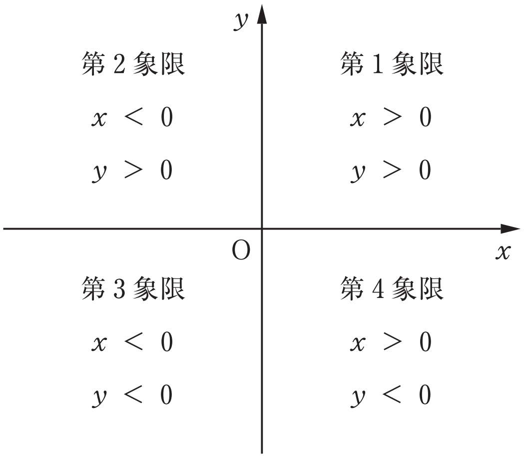


図1

また，座標平面は x 軸，y 軸によって四つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい，右の図のように，それぞれを「第1象限」「第2象限」「第3象限」「第4象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。

このとき，次の問いに答えよ。



（2は次ページに続く。）

(1)　はじめに，図1の画面のように，頂点が第3象限にあるグラフが表示された。このときの a，b，c の値の組合せとして最も適当なものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。 ア

	a	b	c
⓪	2	1	3
①	2	-1	3
②	-2	3	-3
③	$\dfrac{1}{2}$	3	3
④	$\dfrac{1}{2}$	-3	3
⑤	$-\dfrac{1}{2}$	3	-3

(2)　次に，a，b の値を(1)の値のまま変えずに，c の値だけを変化させた。このときの頂点の移動について正しく述べたものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。
イ

⓪　最初の位置から移動しない。
①　x 軸方向に移動する。
②　y 軸方向に移動する。
③　原点を中心として回転移動する。

(2は次ページに続く。)

(3)　また，b，c の値を(1)の値のまま変えずに，a の値だけをグラフが下に凸の状態を維持するように変化させた。このとき，頂点は，$a=\dfrac{b^2}{4c}$ のときは［ウ］にあり，それ以外のときは［エ］を移動した。［ウ］，［エ］に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　原点　　①　x 軸上　　②　y 軸上

③　第3象限のみ　　④　第1象限と第3象限

⑤　第2象限と第3象限　　⑥　第3象限と第4象限

⑦　第2象限と第3象限と第4象限　　⑧　すべての象限

(2は次ページに続く。)

(4) 最初の a, b, c の値を変更して，下の図 2 のようなグラフを表示させた。このとき，a, c の値をこのまま変えずに，b の値だけを変化させても，頂点は第 1 象限および第 2 象限には移動しなかった。

その理由を，頂点の y 座標についての不等式を用いて説明せよ。

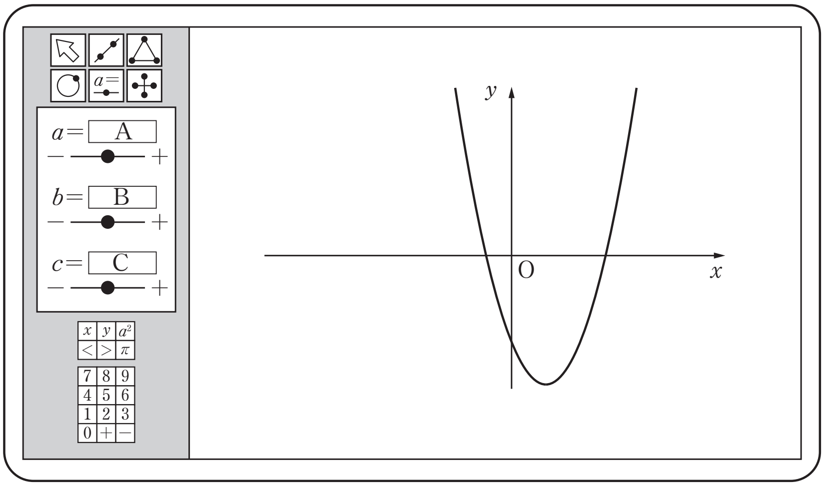


図 2

3　○○高校の生徒会では，文化祭でＴシャツを販売し，その利益をボランティア団体に寄付する企画を考えている。生徒会執行部では，できるだけ利益が多くなる価格を決定するために，次のような手順で考えることにした。

価格決定の手順

(i)　アンケート調査の実施

200人の生徒に，「Ｔシャツ１枚の価格がいくらまでであればＴシャツを購入してもよいと思うか」について尋ね，500円，1000円，1500円，2000円の四つの金額から一つを選んでもらう。

(ii)　業者の選定

無地のＴシャツ代とプリント代を合わせた「製作費用」が最も安い業者を選ぶ。

(iii)　Ｔシャツ１枚の価格の決定

価格は「製作費用」と「見込まれる販売数」をもとに決めるが，販売時に釣り銭の処理で手間取らないよう50の倍数の金額とする。

下の表１は，アンケート調査の結果である。生徒会執行部では，例えば，価格が1000円のときには1500円や2000円と回答した生徒も１枚購入すると考えて，それぞれの価格に対し，その価格以上の金額を回答した生徒の人数を「累積人数」として表示した。

表１

Ｔシャツ１枚の価格(円)	人数(人)	累積人数(人)
2000	50	50
1500	43	93
1000	61	154
500	46	200

このとき，次の問いに答えよ。

(3は次ページに続く。)

(1)　売上額は

(売上額)＝(Ｔシャツ1枚の価格)×(販売数)

と表せるので，生徒会執行部では，アンケートに回答した 200 人の生徒について，調査結果をもとに，表１にない価格の場合についても販売数を予測することにした。そのために，Ｔシャツ１枚の価格を x 円，このときの販売数を y 枚とし，x と y の関係を調べることにした。

表１のＴシャツ１枚の価格と［ア］の値の組を $(x,\ y)$ として座標平面上に表すと，その４点が直線に沿って分布しているように見えたので，この直線を，Ｔシャツ１枚の価格 x と販売数 y の関係を表すグラフとみなすことにした。

このとき，y は x の［イ］であるので，売上額を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の［ウ］である。このように考えると，表１にない価格の場合についても売上額を予測することができる。

［ア］，［イ］，［ウ］に入るものとして最も適当なものを，次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　人数　①　累積人数　②　製作費用　③　比例
④　反比例　⑤　１次関数　⑥　２次関数

生徒会執行部が(1)で考えた直線は，表１を用いて座標平面上にとった４点のうち x の値が最小の点と最大の点を通る直線である。この直線を用いて，次の問いに答えよ。

(2)　売上額 $S(x)$ が最大になる x の値を求めよ。［エオカキ］

(3)　Ｔシャツ１枚当たりの「製作費用」が 400 円の業者に 120 枚を依頼することにしたとき，利益が最大になるＴシャツ１枚の価格を求めよ。

［クケコサ］円

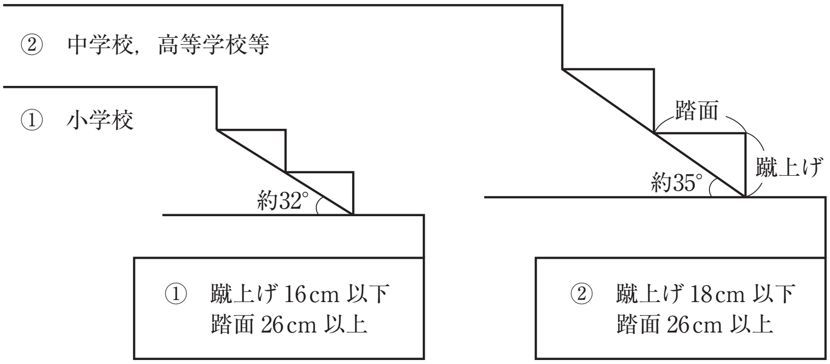
第3講　図形と計量

1 〔1〕 久しぶりに小学校に行くと，階段の一段一段の高さが低く感じられることがある。これは，小学校と高等学校とでは階段の基準が異なるからである。学校の階段の基準は，下のように建築基準法によって定められている。

高等学校の階段では，蹴上(けあ)げが 18 cm 以下，踏面(ふみづら)が 26 cm 以上となっており，この基準では，傾斜は最大で約 35° である。

【建築基準法による階段の基準】

＊下の図は，階段の傾斜が基準内で最大のときを表している。



階段の傾斜をちょうど 33° とするとき，蹴上げを 18 cm 以下にするためには，踏面をどのような範囲に設定すればよいか。踏面を x cm として，x のとり得る値の範囲を求めるための不等式を，33° の三角比と x を用いて表せ。ただし，踏面と蹴上げの長さはそれぞれ一定であるとし，また，踏面は水平であり，蹴上げは踏面に対して垂直であるとする。

(本問題の図は，「建築基準法の階段に係る基準について」(国土交通省)をもとに作成している。)

< NOTE >

〔2〕　三角形ABCの外接円をOとし，円Oの半径をRとする。辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cとし，∠CAB，∠ABC，∠BCAの大きさをそれぞれA，B，Cとする。

太郎さんと花子さんは三角形ABCについて

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\cdots(*)$$

の関係が成り立つことを知り，その理由について，まず直角三角形の場合を次のように考察した。

$C=90^\circ$のとき，円周角の定理より，線分ABは円Oの直径である。

よって，

$$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{a}{2R}$$

であるから，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

となる。

同様にして，

$$\frac{b}{\sin B}=2R$$

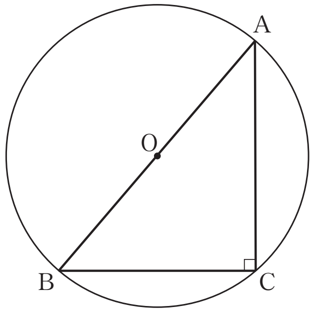
である。

また，$\sin C=1$なので，

$$\frac{c}{\sin C}=\mathrm{AB}=2R$$

である。

よって，$C=90^\circ$のとき$(*)$の関係が成り立つ。

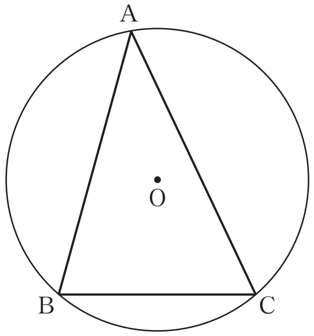


次に，太郎さんと花子さんは，三角形ABCが鋭角三角形や鈍角三角形のときにも$(*)$の関係が成り立つことを証明しようとしている。

(1〔2〕は次ページに続く。)

(1)　三角形 ABC が鋭角三角形の場合についても(＊)の関係が成り立つことは，直角三角形の場合に(＊)の関係が成り立つことをもとにして，次のような太郎さんの構想により証明できる。

太郎さんの証明の構想



点 A を含む弧 BC 上に点 A′ をとると，円周角の定理より

$$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{CA'B}$$

が成り立つ。

特に，［ア］を点 A′ とし，三角形 A′BC に対して $C=90^\circ$ の場合の考察の結果を利用すれば，

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つことを証明できる。

$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ についても同様に証明できる。

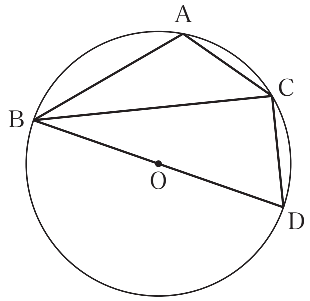
［ア］に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　点 B から辺 AC に下ろした垂線と，円 O との交点のうち点 B と異なる点
①　直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点
②　点 B を中心とし点 C を通る円と，円 O との交点のうち点 C と異なる点
③　点 O を通り辺 BC に平行な直線と，円 O との交点のうちの一つ
④　辺 BC と直交する円 O の直径と，円 O との交点のうちの一つ

(①〔2〕は次ページに続く。)

(2) 三角形 ABC が $A>90^\circ$ である鈍角三角形の場合についても $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つことは，次のような花子さんの構想により証明できる。

花子さんの証明の構想



右図のように，線分 BD が円 O の直径となるように点 D をとると，三角形 BCD において

$$\sin \boxed{\text{イ}} = \frac{a}{2R}$$

である。

このとき，四角形 ABDC は円 O に内接するから，

$$\angle\text{CAB} = \boxed{\text{ウ}}$$

であり，

$$\sin\angle\text{CAB} = \sin\left(\boxed{\text{ウ}}\right) = \sin\boxed{\text{イ}}$$

となることを用いる。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

$\boxed{\text{イ}}$ **の解答群**

⓪ ∠ABC　① ∠ABD　② ∠ACB　③ ∠ACD
④ ∠BCD　⑤ ∠BDC　⑥ ∠CBD

$\boxed{\text{ウ}}$ **の解答群**

⓪ $90^\circ+\angle\text{ABC}$　① $180^\circ-\angle\text{ABC}$
② $90^\circ+\angle\text{ACB}$　③ $180^\circ-\angle\text{ACB}$
④ $90^\circ+\angle\text{BDC}$　⑤ $180^\circ-\angle\text{BDC}$
⑥ $90^\circ+\angle\text{ABD}$　⑦ $180^\circ-\angle\text{CBD}$

＜ NOTE ＞

2 $\angle ACB = 90°$ である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P，Q，R がある。点 P，Q，R は，次の規則に従って移動する。

- 最初，点 P，Q，R はそれぞれ点 A，B，C の位置にあり，点 P，Q，R は同時刻に移動を開始する。
- 点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく，一定の速さで移動する。ただし，点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
- 点 P，Q，R は，それぞれ点 C，A，B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

(1) 図 1 の直角三角形 ABC を考える。

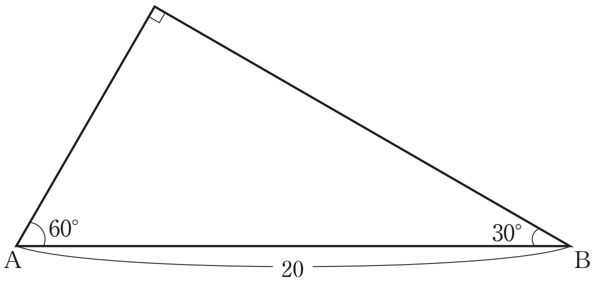


図 1

(i) 各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めよ。

$PQ = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}$，$S = \boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$

(2は次ページに続く。)

(ii) 各点が移動する間の線分 PR の長さとして，とり得ない値，一回だけとり得る値，二回だけとり得る値を，次の⓪〜④のうちからそれぞれ**すべて選べ**。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとする。

とり得ない値　[カ]
一回だけとり得る値　[キ]
二回だけとり得る値　[ク]

⓪ $5\sqrt{2}$　① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ 10　④ $10\sqrt{3}$

(iii) 各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。各時刻における S_1，S_2，S_3 の間の大小関係と，その大小関係が時刻とともにどのように変化するかを答えよ。

(2) 直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めよ。

$$\frac{\boxed{ケコ} \pm \boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$ 秒後

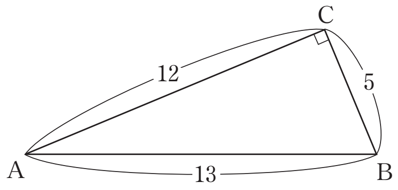


図 2

3　以下の問題では，△ABC に対して，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すものとする。

ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次のような宿題が出された。

宿題　△ABC において $A=60^\circ$ であるとする。このとき， $X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$ の値について調べなさい。

放課後，太郎さんと花子さんは出された宿題について会話をした。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

（3は次ページに続く。）

太郎：A は 60° だけど，B も C も分からないから，方針が立たないよ。 花子：まずは，具体的に一つ例を作って考えてみようよ。もし $B=90^\circ$ であるとすると，$\cos B=$ ［ア］，$\sin C=$ ［イ］ だね。だから，この場合の X の値を計算すると 1 になるね。

(1) ［ア］，［イ］ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\dfrac{1}{2}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑧ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（３は次ページに続く。）

太郎：$B=13^\circ$ にしてみよう。数学の教科書に三角比の表があるから，それを見ると，$\cos B=0.9744$ で，$\sin C$ は……あれっ？　表には 0° から 90° までの三角比の値しか載っていないから分からないね。

花子：そういうときは，［ウ］という関係を利用したらいいよ。この関係を使うと，教科書の三角比の表から $\sin C=$［エ］だと分かるよ。

太郎：じゃあ，この場合の X の値を電卓を使って計算してみよう。$\sqrt{3}$ は 1.732 として計算すると……あれっ？　ぴったりにはならなかったけど，小数第 4 位を四捨五入すると，X は 1.000 になったよ！
(a)これで，$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のときに $X=1$ になることが証明できたことになるね。さらに，(b)「$A=60^\circ$ ならば $X=1$」という命題が真であると証明できたね。

花子：本当にそうなのかな？

(2)［ウ］，［エ］に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

［ウ］の解答群：

⓪ $\sin(90^\circ-\theta)=\sin\theta$　① $\sin(90^\circ-\theta)=-\sin\theta$
② $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　③ $\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$
④ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$　⑤ $\sin(180^\circ-\theta)=-\sin\theta$
⑥ $\sin(180^\circ-\theta)=\cos\theta$　⑦ $\sin(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

［エ］の解答群：

⓪ -3.2709　① -0.9563　② 0.9563　③ 3.2709

（③は次ページに続く。）

(3)　太郎さんが言った下線部(a), (b)について，その正誤の組合せとして正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 オ

⓪　下線部(a)，(b)ともに正しい。

①　下線部(a)は正しいが，(b)は誤りである。

②　下線部(a)は誤りであるが，(b)は正しい。

③　下線部(a)，(b)ともに誤りである。

花子：$A=60^\circ$ ならば $X=1$ となるかどうかを，数式を使って考えてみようよ。 △ABC の外接円の半径を R とするね。すると，$A=60^\circ$ だから， BC$=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,R$ になるね。 太郎：AB＝ キ ，AC＝ ク になるよ。

(4)　 カ に当てはまる数を答えよ。また， キ ， ク に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

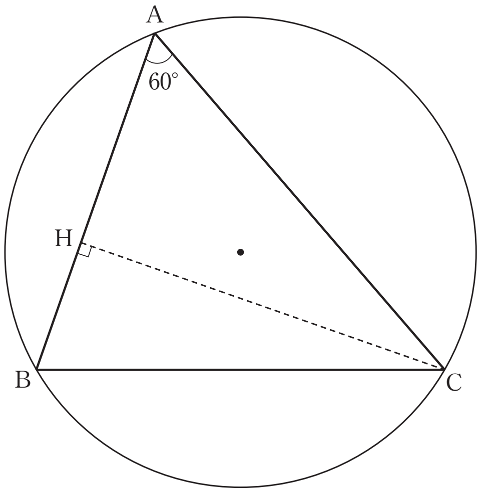
⓪　$R\sin B$　　①　$2R\sin B$　　②　$R\cos B$　　③　$2R\cos B$

④　$R\sin C$　　⑤　$2R\sin C$　　⑥　$R\cos C$　　⑦　$2R\cos C$

(③は次ページに続く。)

花子：まず，B が鋭角の場合を考えてみたよ。

〈花子さんのノート〉



点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと

$\mathrm{AH}=\underline{\mathrm{AC}\cos 60^\circ}_{①}$

$\mathrm{BH}=\underline{\mathrm{BC}\cos B}_{②}$

である。AB を AH，BH を用いて表すと

$\mathrm{AB}=\underline{\mathrm{AH}+\mathrm{BH}}_{③}$

であるから，

$\underline{\mathrm{AB}=\boxed{\text{ケ}}\sin B+\boxed{\text{コ}}\cos B}_{④}$

が得られる。

太郎：さっき，AB＝$\boxed{\text{キ}}$ と求めたから，④の式とあわせると，$X=1$ となることが証明できたよ。

花子：B が直角のときは，すでに $X=1$ となることを計算したね。

(c)<u>B が鈍角のときは，証明を少し変えれば</u>，やはり $X=1$ であることが示せるね。

（3は次ページに続く。）

(5)　［ケ］，［コ］に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\frac{1}{2}R$　① $\frac{\sqrt{2}}{2}R$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}R$　③ R　④ $\sqrt{2}R$
⑤ $\sqrt{3}R$　⑥ $2R$　⑦ $2\sqrt{2}R$　⑧ $2\sqrt{3}R$

(6)　下線部(c)について，B が鈍角のときには下線部①～③の式のうち修正が必要なものがある。修正が必要な番号についてのみ，修正した式をそれぞれ答えよ。

> 花子：今まではずっと $A=60°$ の場合を考えてきたんだけど，$A=120°$ で $B=30°$ の場合を考えてみたよ。$\sin B$ と $\cos C$ の値を求めて，X の値を計算したら，この場合にも１になったんだよね。
> 太郎：わっ，本当だ。計算してみたら X の値は１になるね。

(7)　△ABC について，次の条件 p，q を考える。

p：$A=60°$
q：$4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$

これまでの太郎さんと花子さんが行った考察をもとに，正しいと判断できるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。［サ］

⓪ p は q であるための必要十分条件である。
① p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。
② p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない。
③ p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

第４講　データの分析

[1] (1) 次の [ア]，[イ] に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

99 個の観測値からなるデータがある。四分位数について述べた記述で，どのようなデータでも成り立つものは [ア] と [イ] である。

⓪ 平均値は第 1 四分位数と第 3 四分位数の間にある。

① 四分位範囲は標準偏差より大きい。

② 中央値より小さい観測値の個数は 49 個である。

③ 最大値に等しい観測値を 1 個削除しても第 1 四分位数は変わらない。

④ 第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値の個数は 51 個である。

⑤ 第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しい。

([1]は次々ページに続く。)

＜ NOTE ＞

(2)　図1は，平成27年の男の市区町村別平均寿命のデータを47の都道府県P1，P2，…，P47ごとに箱ひげ図にして，並べたものである。

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図1に関する記述である。

(Ⅰ)　四分位範囲はどの都道府県においても1以下である。

(Ⅱ)　箱ひげ図は中央値が小さい値から大きい値の順に上から下へ並んでいる。

(Ⅲ)　P1のデータのどの値とP47のデータのどの値とを比較しても1.5以上の差がある。

次の［ウ］に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは［ウ］である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	誤	正	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	正	誤	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	正	誤	誤	正	誤

(［1］は次ページに続く。)

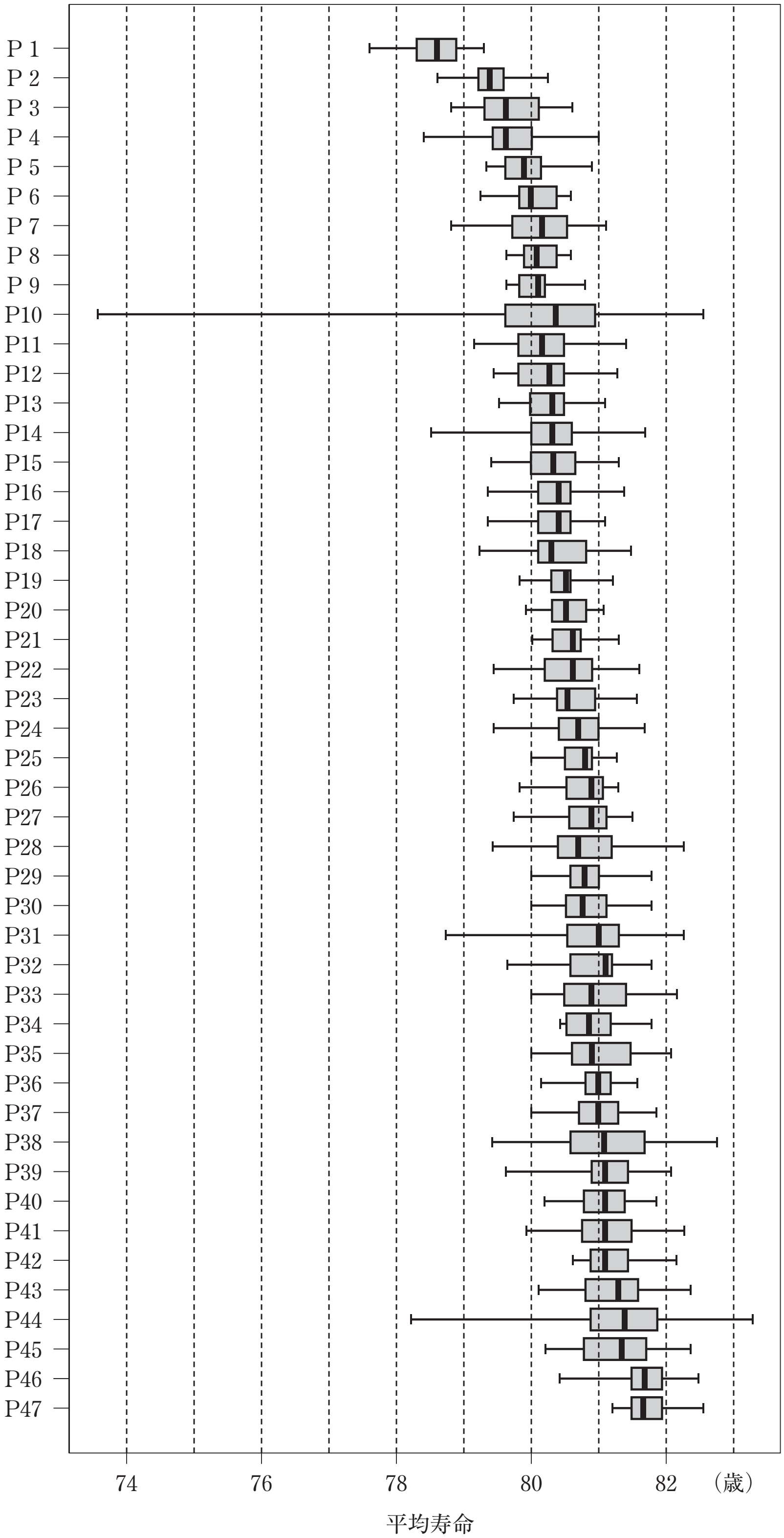


図１　男の市区町村別平均寿命の箱ひげ図

（出典：厚生労働省の Web ページにより作成）

（1は次ページに続く。）

(3) ある県は 20 の市区町村からなる。図 2 はその県の男の市区町村別平均寿命のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

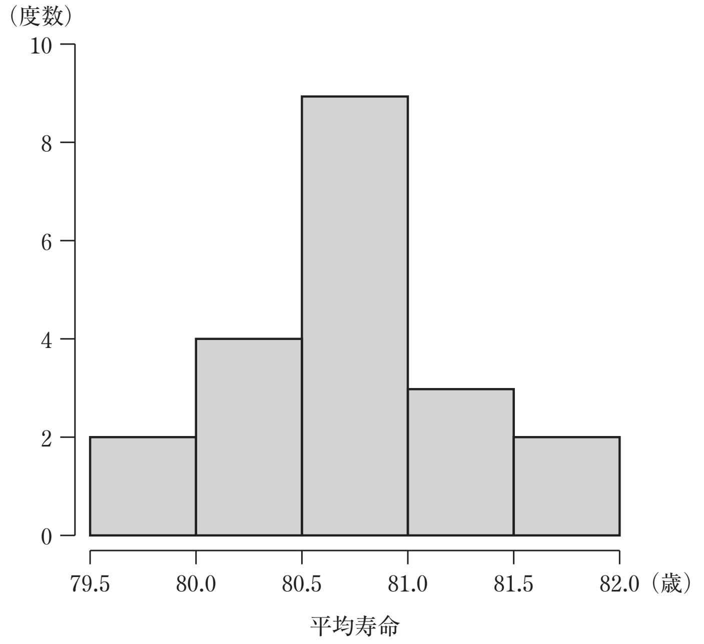
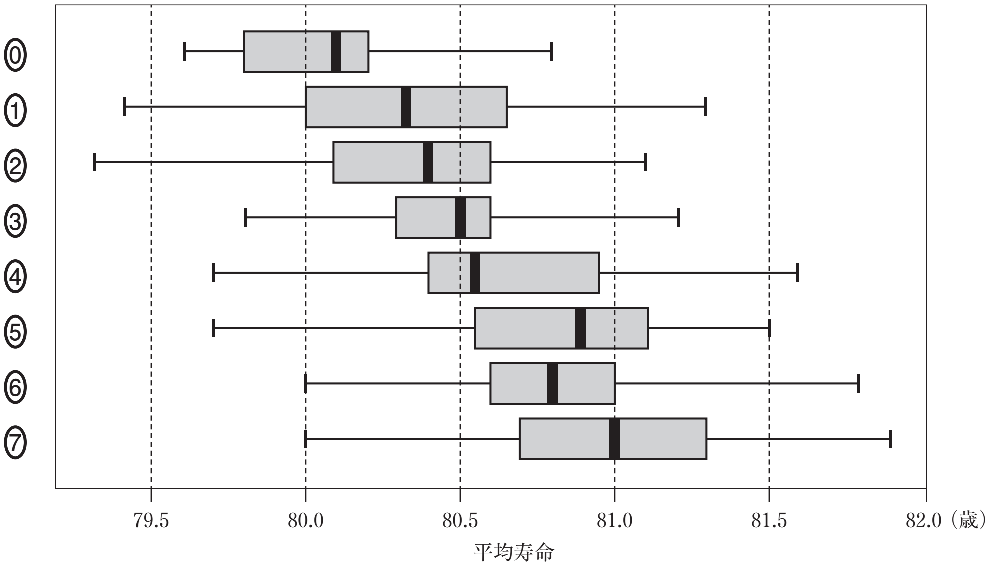


図 2　市区町村別平均寿命のヒストグラム
（出典：厚生労働省の Web ページにより作成）

（1は次ページに続く。）

次の [エ] に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

図２のヒストグラムに対する箱ひげ図は [エ] である。



（1は次ページに続く。）

(4)　図 3 は，平成 27 年の男の都道府県別平均寿命と女の都道府県別平均寿命の散布図である。2 個の点が重なって区別できない所は黒丸にしている。図には補助的に切片が 5.5 から 7.5 まで 0.5 刻みで傾き 1 の直線を 5 本付加している。

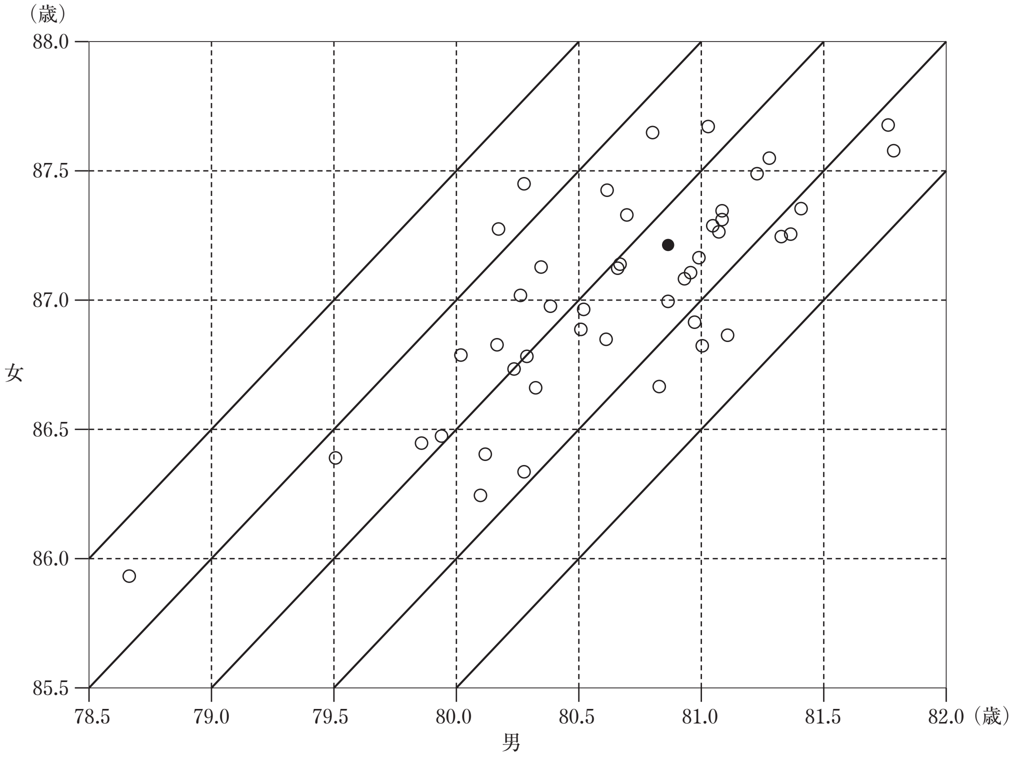


図 3　男と女の都道府県別平均寿命の散布図

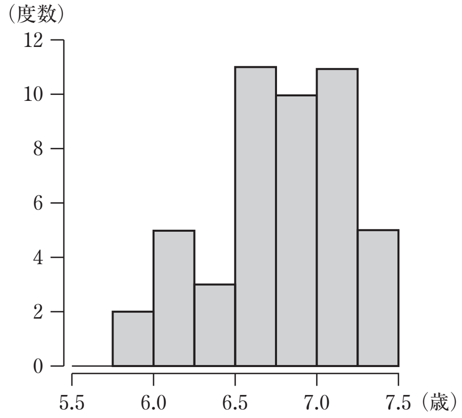
(出典：厚生労働省の Web ページにより作成)

(1は次ページに続く。)

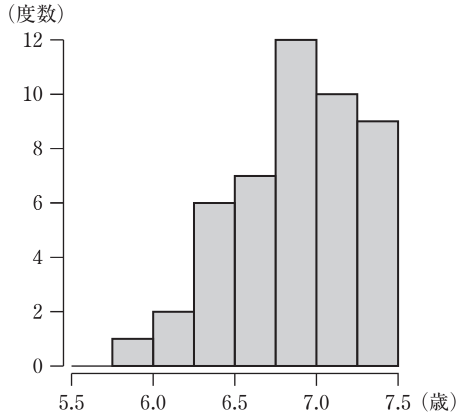
次の　オ　に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

都道府県ごとに男女の平均寿命の差をとったデータに対するヒストグラムは　**オ**　である。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

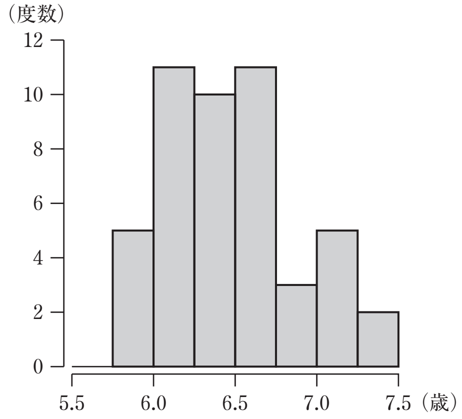
⓪



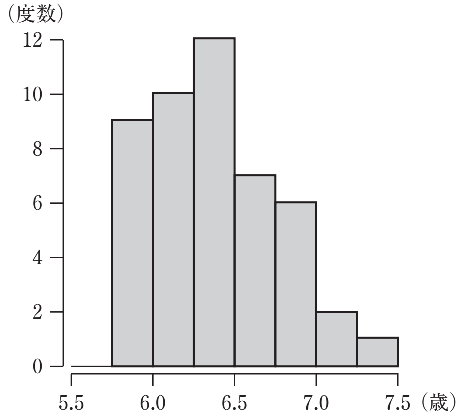
①



②



③



2　太郎さんと花子さんは二つの変量 x, y の相関係数について考えている。二人の会話を読み，下の問いに答えよ。

> 花子：先生からもらった表計算ソフトのA列とB列に値を入れると，E列にはD列に対応する正しい値が表示されるよ。
> 太郎：最初は簡単なところで二組から考えてみよう。
> 花子：2行目を $(x,\ y)=(1,\ 2)$，3行目を $(x,\ y)=(2,\ 1)$ としてみるね。

このときのコンピュータの画面の様子が次の図である。

	A	B	C	D	E
1	変量 x	変量 y		(x の平均値)＝	ア
2	1	2		(x の標準偏差)＝	イ
3	2	1		(y の平均値)＝	ア
4				(y の標準偏差)＝	イ
5					
6				(x と y の相関係数)＝	ウ
7					

(1)　ア，イ，ウ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　-1.50　①　-1.00　②　-0.50　③　-0.25　④　0.00
⑤　0.25　⑥　0.50　⑦　1.00　⑧　1.50　⑨　2.00

(2は次ページに続く。)

太郎：3 行目の変量 y の値を 0 や -1 に変えても相関係数の値は［ウ］になったね。 花子：今度は，3 行目の変量 y の値を 2 に変えてみよう。 太郎：エラーが表示されて，相関係数は計算できないみたいだ。

(2)　変量 x と変量 y の値の組を変更して，$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 2)$ としたときには相関係数が計算できなかった。その理由として最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。［エ］

⓪　値の組の個数が 2 個しかないから。

①　変量 x の平均値と変量 y の平均値が異なるから。

②　変量 x の標準偏差の値と変量 y の標準偏差の値が異なるから。

③　変量 y の標準偏差の値が 0 であるから。

花子：3 行目の変量 y の値を 3 に変更してみよう。相関係数の値は 1.00 だね。 太郎：3 行目の変量 y の値が 4 のときも 5 のときも，相関係数の値は 1.00 だ。 花子：相関係数の値が 1.00 になるのはどんな特徴があるときかな。 太郎：値の組の個数を多くすると何かわかるかもしれないよ。

（2は次ページに続く。）

花子：じゃあ，次の値の組の個数を 3 としてみよう。
太郎：$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)$ とすると相関係数の値は 1.00 だ。
花子：$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ とすると相関係数の値は 0.00 になった。
太郎：$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 2)$ とすると相関係数の値は 1.00 だね。
花子：まったく同じ値の組が含まれていても相関係数の値は計算できることがあるんだね。
太郎：思い切って，値の組の個数を 100 にして，1 個だけ $(x,\ y)=(1,\ 1)$ で，99 個は $(x,\ y)=(2,\ 2)$ としてみるね……。相関係数の値は 1.00 になったよ。
花子：値の組の個数が多くても，相関係数の値が1.00になるときもあるね。

(3)　相関係数の値についての記述として**誤っているもの**を，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 オ

⓪　値の組の個数が 2 のときには相関係数の値が 0.00 になることはない。

①　値の組の個数が 3 のときには相関係数の値が -1.00 となることがある。

②　値の組の個数が 4 のときには相関係数の値が 1.00 になることはない。

③　値の組の個数が 50 であり，1 個の値の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの 49 個の値の組が $(x,\ y)=(2,\ 0)$ のときは相関係数の値は -1.00 である。

④　値の組の個数が 100 であり，50 個の値の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの 50 個の値の組が $(x,\ y)=(2,\ 2)$ のときは相関係数の値は 1.00 である。

（2は次ページに続く。）

花子：値の組の個数が 2 のときは，相関係数の値は 1.00 か［ウ］，または計算できない場合の 3 通りしかないね。

太郎：値の組を散布図に表したとき，相関係数の値はあくまで散布図の点が［カ］程度を表していて，値の組の個数が 2 の場合に，花子さんが言った 3 通りに限られるのは［キ］からだね。値の組の個数が多くても値の組が 2 種類のときはそれらにしかならないんだね。

花子：なるほどね。相関係数は，そもそも値の組の個数が多いときに使われるものだから，組の個数が極端に少ないときなどにはあまり意味がないのかもしれないね。

太郎：値の組の個数が少ないときはもちろんのことだけど，基本的に散布図と相関係数を合わせてデータの特徴を考えるとよさそうだね。

(4)［カ］，［キ］に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

［カ］**の解答群**

⓪ x 軸に関して対称に分布する

① 変量 x，y のそれぞれの中央値を表す点の近くに分布する

② 変量 x，y のそれぞれの平均値を表す点の近くに分布する

③ 円周に沿って分布する

④ 直線に沿って分布する

［キ］**の解答群**

⓪ 変量 x の中央値と平均値が一致する

① 変量 x の四分位数を考えることができない

② 変量 x，y のそれぞれの平均値を表す点からの距離が等しい

③ 平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にある

④ 平面上の異なる 2 点を通る円はただ 1 つに決まらない

3　地方の経済活性化のため，太郎さんと花子さんは観光客の消費に着目し，その拡大に向けて基礎的な情報を整理することにした。以下は，都道府県別の統計データを集め，分析しているときの二人の会話である。会話を読んで下の問いに答えよ。ただし，東京都，大阪府，福井県の3都府県のデータは含まれていない。また，以後の問題文では「道府県」を単に「県」として表記する。

太郎：各県を訪れた観光客数を x 軸，消費総額を y 軸にとり，散布図を作ると図1のようになったよ。

花子：消費総額を観光客数で割った消費額単価が最も高いのはどこかな。

太郎：元のデータを使って県ごとに割り算をすれば分かるよ。

北海道は……。44回も計算するのは大変だし，間違えそうだな。

花子：図1を使えばすぐ分かるよ。

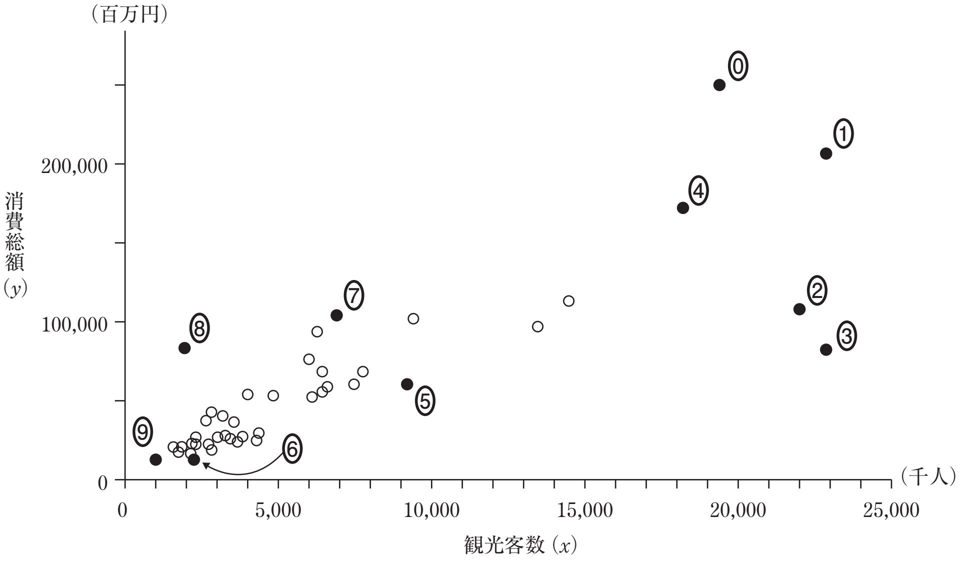


図1

（3は次ページに続く。）

(1)　図１の観光客数と消費総額の間の相関係数に最も近い値を，次の⓪～④のうち から一つ選べ。 ア

⓪　−0.85　　①　−0.52　　②　0.02　　③　0.34　　④　0.83

(2)　44県それぞれの消費額単価を計算しなくても，図１の散布図から消費額単価が最も高い県を表す点を特定することができる。その方法を，「直線」という単語を用いて説明せよ。

(3)　消費額単価が最も高い県を表す点を，図１の⓪～⑨のうちから一つ選べ。 イ

(3は次ページに続く。)

花子：元のデータを見ると消費額単価が最も高いのは沖縄県だね。沖縄県の消費額単価が高いのは，県外からの観光客数の影響かな。

太郎：県内からの観光客と県外からの観光客とに分けて 44 県の観光客数と消費総額を箱ひげ図で表すと図 2 のようになったよ。

花子：私は県内と県外からの観光客の消費額単価をそれぞれ横軸と縦軸にとって図 3 の散布図をつくってみたよ。沖縄県は県内，県外ともに観光客の消費額単価は高いね。それに，北海道，鹿児島県，沖縄県は全体の傾向から外れているみたい。

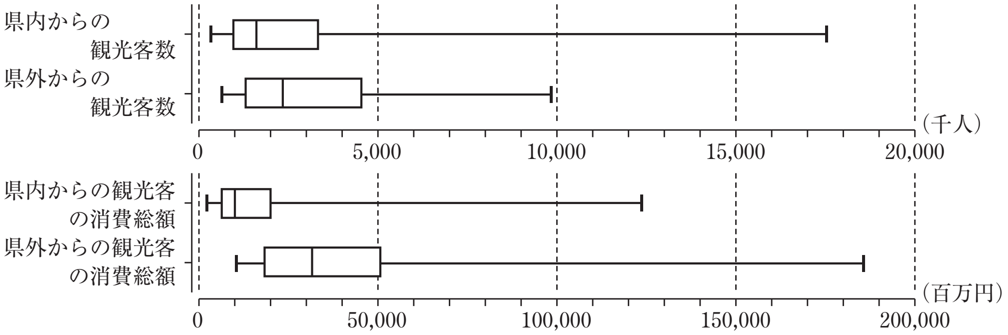


図 2

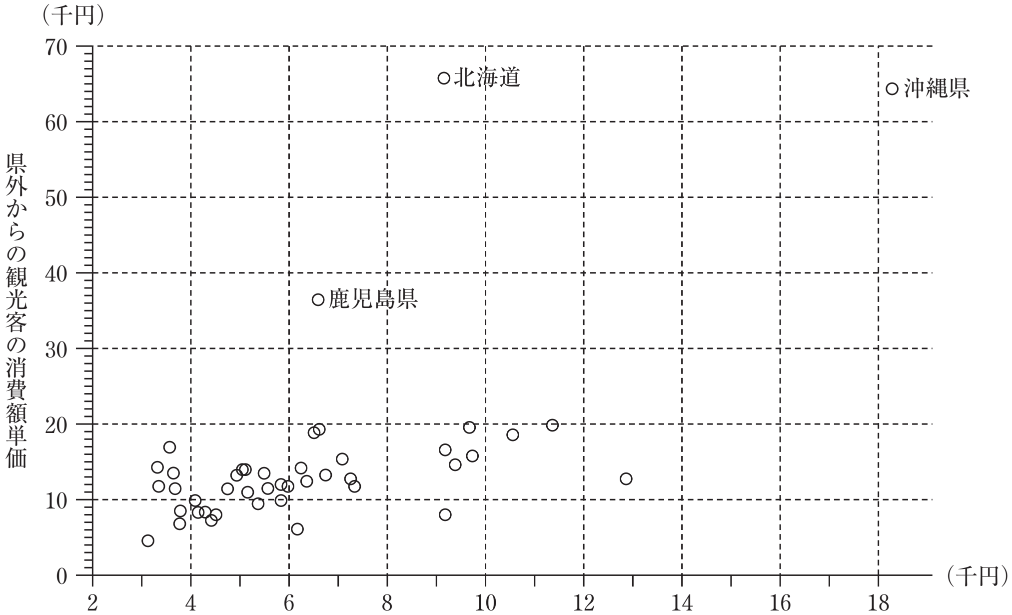


図 3

(3は次ページに続く。)

(4)　図 2，図 3 から読み取れる事柄として正しいものを，次の⓪～④のうちから**二つ選べ**。 ウ

⓪　44 県の半分の県では，県内からの観光客数よりも県外からの観光客数の方が多い。

①　44 県の半分の県では，県内からの観光客の消費総額よりも県外からの観光客の消費総額の方が高い。

②　44 県の 4 分の 3 以上の県では，県外からの観光客の消費額単価の方が県内からの観光客の消費額単価より高い。

③　県外からの観光客の消費額単価の平均値は，北海道，鹿児島県，沖縄県を除いた 41 県の平均値の方が 44 県の平均値より小さい。

④　北海道，鹿児島県，沖縄県を除いて考えると，県内からの観光客の消費額単価の分散よりも県外からの観光客の消費額単価の分散の方が小さい。

（3は次ページに続く。）

(5) 二人は県外からの観光客に焦点を絞って考えることにした。

花子：県外からの観光客数を増やすには，イベントなどを増やしたらいいんじゃないかな。

太郎：44 県の行祭事・イベントの開催数と県外からの観光客数を散布図にすると，図 4 のようになったよ。

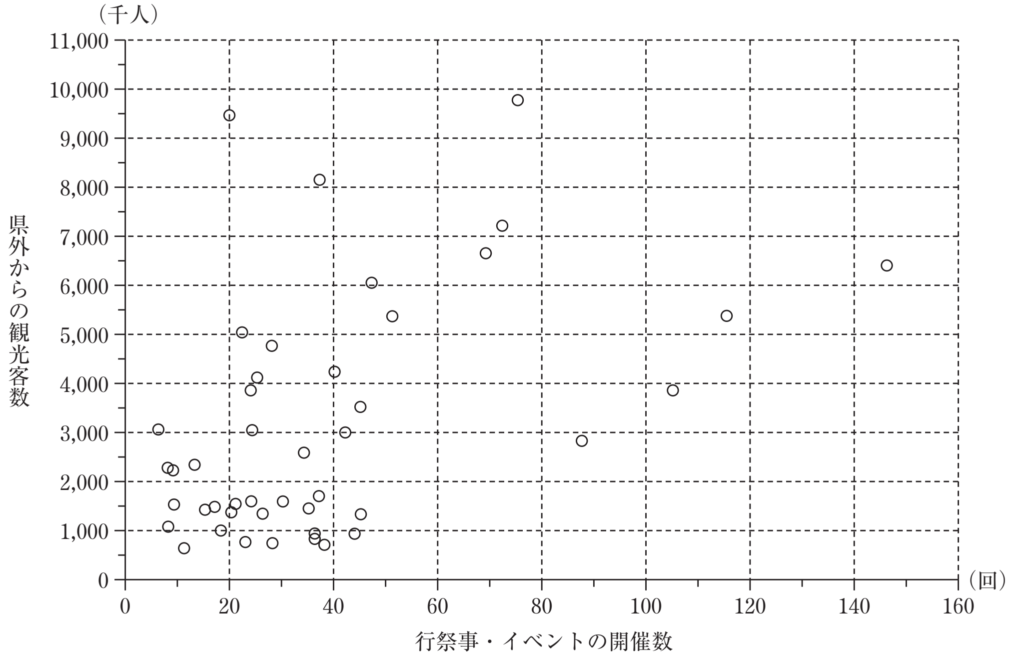


図 4

(③は次ページに続く。)

図 4 から読み取れることとして最も適切な記述を，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 エ

⓪　44 県の行祭事・イベント開催数の中央値は，その平均値よりも大きい。

①　行祭事・イベントを多く開催し過ぎると，県外からの観光客数は減ってしまう傾向がある。

②　県外からの観光客数を増やすには行祭事・イベントの開催数を増やせばよい。

③　行祭事・イベントの開催数が最も多い県では，行祭事・イベントの開催一回当たりの県外からの観光客数は 6,000 千人を超えている。

④　県外からの観光客数が多い県ほど，行祭事・イベントを多く開催している傾向がある。

第５講　場合の数と確率

1 〔1〕 次の ア ， イ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

正しい記述は ア と イ である。

⓪　1 枚のコインを投げる試行を 5 回繰り返すとき，少なくとも 1 回は表が出る確率を p とすると，$p>0.95$ である。

①　袋の中に赤球と白球が合わせて 8 個入っている。球を 1 個取り出し，色を調べてから袋に戻す試行を行う。この試行を 5 回繰り返したところ赤球が 3 回出た。したがって，1 回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{3}{5}$ である。

②　箱の中に「い」と書かれたカードが 1 枚，「ろ」と書かれたカードが 2 枚，「は」と書かれたカードが 2 枚の合計 5 枚のカードが入っている。同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた文字が異なる確率は $\dfrac{4}{5}$ である。

③　コインの面を見て「オモテ(表)」または「ウラ(裏)」とだけ発言するロボットが 2 体ある。ただし，どちらのロボットも出た面に対して正しく発言する確率が 0.9，正しく発言しない確率が 0.1 であり，これら 2 体は互いに影響されることなく発言するものとする。いま，ある人が 1 枚のコインを投げる。出た面を見た 2 体が，ともに「オモテ」と発言したときに，実際に表が出ている確率を p とすると，$p\leqq 0.9$ である。

〔２〕 １枚のコインを最大で５回投げるゲームを行う。このゲームでは，１回投げるごとに表が出たら持ち点に２点を加え，裏が出たら持ち点に -1 点を加える。はじめの持ち点は０点とし，ゲーム終了のルールを次のように定める。

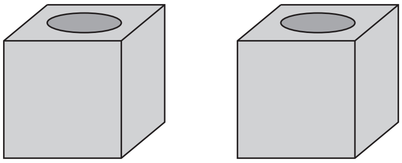
・持ち点が再び０点になった場合は，その時点で終了する。
・持ち点が再び０点にならない場合は，コインを５回投げ終わった時点で終了する。

(1) コインを２回投げ終わって持ち点が -2 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，コインを２回投げ終わって持ち点が１点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 持ち点が再び０点になることが起こるのは，コインを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げ終わったときである。コインを $\boxed{\text{キ}}$ 回投げ終わって持ち点が０点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) ゲームが終了した時点で持ち点が４点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(4) ゲームが終了した時点で持ち点が４点であるとき，コインを２回投げ終わって持ち点が１点である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。



2　くじが 100 本ずつ入った二つの箱があり，それぞれの箱に入っている当たりくじの本数は異なる。これらの箱から二人の人が順にどちらかの箱を選んで 1 本ずつくじを引く。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

また，くじを引く人は，最初にそれぞれの箱に入れる当たりくじの本数は知っているが，それらがどちらの箱に入っているかはわからないものとする。

今，1 番目の人が一方の箱からくじを 1 本引いたところ，当たりくじであったとする。2 番目の人が当たりくじを引く確率を大きくするためには，1 番目の人が引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきかを考察しよう。

最初に当たりくじが多く入っている方の箱を A，もう一方の箱を B とし，1 番目の人がくじを引いた箱が A である事象を A，B である事象を B とする。このとき，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ とする。また，1 番目の人が当たりくじを引く事象を W とする。

太郎さんと花子さんは，箱 A，箱 B に入っている当たりくじの本数によって，2 番目の人が当たりくじを引く確率がどのようになるかを調べている。

(1)　箱 A には当たりくじが 10 本入っていて，箱 B には当たりくじが 5 本入っている場合を考える。

花子：1 番目の人が当たりくじを引いたから，その箱が箱 A である可能性が高そうだね。その場合，箱 A には当たりくじが 9 本残っているから，2 番目の人は，1 番目の人と同じ箱からくじを引いた方がよさそうだよ。
太郎：確率を計算してみようよ。

（2は次ページに続く。）

１番目の人が引いた箱が箱Ａで，かつ当たりくじを引く確率は，

$$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

である。一方で，１番目の人が当たりくじを引く事象 W は，箱Ａから当たりくじを引くか箱Ｂから当たりくじを引くかのいずれかであるので，その確率は，

$$P(W)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。

よって，１番目の人が当たりくじを引いたという条件の下で，その箱が箱Ａであるという条件付き確率 $P_W(A)$ は，

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

と求められる。

また，１番目の人が当たりくじを引いた後，同じ箱から２番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は，

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{\boxed{\text{ケ}}}{99}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。

それに対して，１番目の人が当たりくじを引いた後，異なる箱から２番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

（２は次ページに続く。）

花子：やっぱり１番目の人が当たりくじを引いた場合は，同じ箱から引いた方が当たりくじを引く確率が大きいよ。 太郎：そうだね。でも，思ったより確率の差はないんだね。もう少し当たりくじの本数の差が小さかったらどうなるのだろう。 花子：１番目の人が引いた箱が箱Ａの可能性が高いから，箱Ｂの当たりくじの本数が８本以下だったら，同じ箱のくじを引いた方がよいのではないかな。 太郎：確率を計算してみようよ。

(2)　今度は箱Ａには当たりくじが 10 本入っていて，箱Ｂには当たりくじが７本入っている場合を考える。

１番目の人が当たりくじを引いた後，同じ箱から２番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。それに対して異なる箱からくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は $\dfrac{7}{85}$ である。

(②は次ページに続く。)

太郎：今度は異なる箱から引く方が当たりくじを引く確率が大きくなったね。

花子：最初に当たりくじを引いた箱の方が箱Ａである確率が大きいのに不思議だね。計算してみないと直観ではわからなかったな。

太郎：二つの箱に入っている当たりくじの本数の差が小さくなれば，最初に当たりくじを引いた箱がＡである確率とＢである確率の差も小さくなるよ。最初に当たりくじを引いた箱がＢである場合は，もともと当たりくじが少ない上に前の人が１本引いてしまっているから当たりくじはなおさら引きにくいね。

花子：なるほどね。箱Ａに入っている当たりくじの本数は10本として，箱Ｂに入っている当たりくじが何本であれば同じ箱から引く方がよいのかを調べてみよう。

(3)　箱Ａに当たりくじが10本入っている場合，１番目の人が当たりくじを引いたとき，２番目の人が当たりくじを引く確率を大きくするためには，１番目の人が引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきか。箱Ｂに入っている当たりくじの本数が４本，５本，６本，７本のそれぞれの場合において選ぶべき箱の組み合わせとして正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。［テ］

	箱Ｂに入っている当たりくじの本数			
	４本	５本	６本	７本
⓪	同じ箱	同じ箱	同じ箱	同じ箱
①	同じ箱	同じ箱	同じ箱	異なる箱
②	同じ箱	同じ箱	異なる箱	異なる箱
③	同じ箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱
④	異なる箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱

3 高速道路には，渋滞状況が表示されていることがある。目的地に行く経路が複数ある場合は，渋滞中を示す表示を見て経路を決める運転手も少なくない。太郎さんと花子さんは渋滞中の表示と車の流れについて，仮定をおいて考えてみることにした。

A 地点（入口）から B 地点（出口）に向かって北上する高速道路には，図 1 のように分岐点 A，C，E と合流点 B，D がある。①，②，③は主要道路であり，④，⑤，⑥，⑦は迂回道路である。ただし，矢印は車の進行方向を表し，図 1 の経路以外に A 地点から B 地点に向かう経路はないとする。また，各分岐点 A，C，E には，それぞれ①と④，②と⑦，⑤と⑥の渋滞状況が表示される。

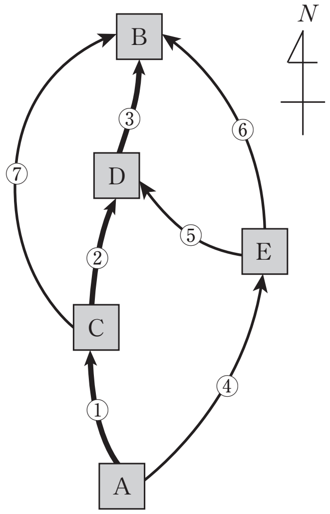


図 1

太郎さんと花子さんは，まず渋滞中の表示がないとき，A，C，E の各分岐点において運転手がどのような選択をしているか調査した。その結果が表 1 である。

表 1

調査日	地点	台数	選択した道路	台数
5 月 10 日	A	1183	①	1092
			④	91
5 月 11 日	C	1008	②	882
			⑦	126
5 月 12 日	E	496	⑤	248
			⑥	248

これに対して太郎さんは，運転手の選択について，次のような仮定をおいて確率を使って考えることにした。

（3は次ページに続く。）

太郎さんの仮定

(i) 表１の選択の割合を確率とみなす。

(ii) 分岐点において，二つの道路のいずれにも渋滞中の表示がない場合，またはいずれにも渋滞中の表示がある場合，運転手が道路を選択する確率は(i)でみなした確率とする。

(iii) 分岐点において，片方の道路にのみ渋滞中の表示がある場合，運転手が渋滞中の表示のある道路を選択する確率は(i)でみなした確率の $\frac{2}{3}$ 倍とする。

ここで，(i)の選択の割合を確率とみなすとは，例えばＡ地点の分岐において④の道路を選択した割合 $\frac{91}{1183}=\frac{1}{13}$ を④の道路を選択する確率とみなすということである。

太郎さんの仮定のもとで，次の問いに答えよ。

(1) すべての道路に渋滞中の表示がない場合，Ａ地点の分岐において運転手が①の道路を選択する確率を求めよ。$\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$

(2) すべての道路に渋滞中の表示がない場合，Ａ地点からＢ地点に向かう車がＤ地点を通過する確率を求めよ。$\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$

(3) すべての道路に渋滞中の表示がない場合，Ａ地点からＢ地点に向かう車でＤ地点を通過した車が，Ｅ地点を通過していた確率を求めよ。$\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$

(4) ①の道路にのみ渋滞中の表示がある場合，Ａ地点からＢ地点に向かう車がＤ地点を通過する確率を求めよ。$\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$

（③は次ページに続く。）

各道路を通過する車の台数が1000台を超えると車の流れが急激に悪くなる。一方で各道路の通過台数が1000台を超えない限り，主要道路である①，②，③をより多くの車が通過することが社会の効率化に繋がる。したがって，各道路の通過台数が1000台を超えない範囲で，①，②，③をそれぞれ通過する台数の合計が最大になるようにしたい。

このことを踏まえて，花子さんは，太郎さんの仮定を参考にしながら，次のような仮定をおいて考えることにした。

花子さんの仮定

(i) 分岐点において，二つの道路のいずれにも渋滞中の表示がない場合，またはいずれにも渋滞中の表示がある場合，それぞれの道路に進む車の割合は表1の割合とする。

(ii) 分岐点において，片方の道路にのみ渋滞中の表示がある場合，渋滞中の表示のある道路に進む車の台数の割合は表1の割合の $\frac{2}{3}$ 倍とする。

過去のデータから5月13日にA地点からB地点に向かう車は1560台と想定している。そこで，花子さんの仮定のもとでこの台数を想定してシミュレーションを行った。このとき，次の問いに答えよ。

（3は次ページに続く。）

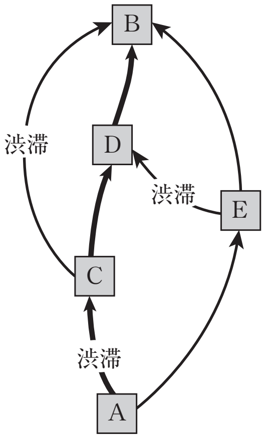
(5)　すべての道路に渋滞中の表示がない場合，①を通過する台数は **タチツテ** 台となる。よって，①の通過台数を 1000 台以下にするには，①に渋滞中の表示を出す必要がある。

①に渋滞中の表示を出した場合，①の通過台数は **トナニ** 台となる。

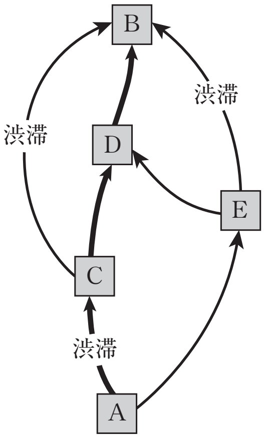
(6)　各道路の通過台数が 1000 台を超えない範囲で，①，②，③をそれぞれ通過する台数の合計を最大にするには，渋滞中の表示を **ヌ** のようにすればよい。

ヌ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

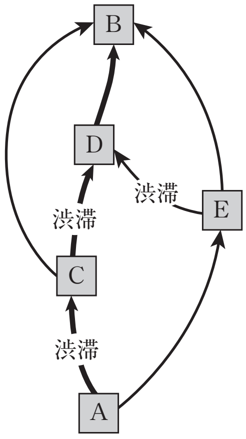
⓪



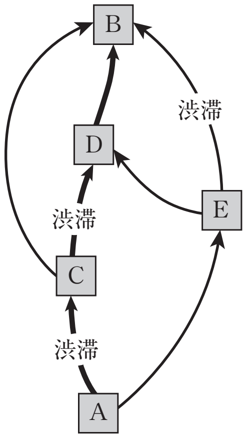
①



②



③



第6講　整数の性質

1 (1)　x を循環小数 $2.\dot{3}\dot{6}$ とする。すなわち

$$x=2.363636\cdots\cdots$$

とする。このとき

$$100\times x-x=236.\dot{3}\dot{6}-2.\dot{3}\dot{6}$$

であるから，x を分数で表すと

$$x=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である。

(1は次ページに続く。)

(2)　有理数 y は，7 進法で表すと，二つの数字の並び ab が繰り返し現れる循環小数 $2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ になるとする。ただし，a, b は 0 以上 6 以下の**異なる**整数である。このとき

$$49\times y-y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}-2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$$

であるから

$$y=\frac{\boxed{\text{オカ}}+7\times a+b}{\boxed{\text{キク}}}$$

と表せる。

(i)　y が，分子が奇数で分母が 4 である分数で表されるのは

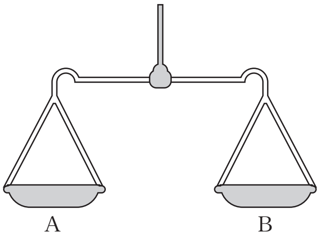
$$y=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{4}\quad \text{または}\quad y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{4}$$

のときである。$y=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{4}$ のときは，$7\times a+b=\boxed{\text{シス}}$ であるから

$$a=\boxed{\text{セ}},\quad b=\boxed{\text{ソ}}$$

である。

(ii)　$y-2$ は，分子が 1 で分母が 2 以上の整数である分数で表されるとする。このような y の個数は，全部で $\boxed{\text{タ}}$ 個である。



2　ある物体Xの質量を天秤(びん)ばかりと分銅を用いて量りたい。天秤ばかりは支点の両側に皿A，Bが取り付けられており，両側の皿にのせたものの質量が等しいときに釣り合うように作られている。分銅は3gのものと8gのものを何個でも使うことができ，天秤ばかりの皿の上には分銅を何個でものせることができるものとする。以下では，物体Xの質量をM(g)とし，Mは自然数であるとする。

(1)　天秤ばかりの皿Aに物体Xをのせ，皿Bに3gの分銅3個をのせたところ，天秤ばかりはBの側に傾いた。さらに，皿Aに8gの分銅1個をのせたところ，天秤ばかりはAの側に傾き，皿Bに3gの分銅2個をのせると天秤ばかりは釣り合った。このとき，皿A，Bにのせているものの質量を比較すると

$$M+8\times\boxed{\text{ア}}=3\times\boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，$M=\boxed{\text{ウ}}$ である。上の式は

$$3\times\boxed{\text{イ}}+8\times\left(-\boxed{\text{ア}}\right)=M$$

と変形することができ，$x=\boxed{\text{イ}}$，$y=-\boxed{\text{ア}}$ は，方程式 $3x+8y=M$ の整数解の一つである。

（2は次ページに続く。）

(2) $M=1$ のとき，皿Aに物体Xと8gの分銅 エ 個をのせ，皿Bに3gの分銅3個をのせると釣り合う。

よって，M がどのような自然数であっても，皿Aに物体Xと8gの分銅 オ 個をのせ，皿Bに3gの分銅 カ 個をのせることで釣り合うことになる。

オ ， カ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $M-1$　　① M　　② $M+1$

③ $M+3$　　④ $3M$　　⑤ $5M$

(3) $M=20$ のとき，皿Aに物体Xと3gの分銅 p 個を，皿Bに8gの分銅 q 個をのせたところ，天秤ばかりが釣り合ったとする。このような自然数の組 $(p,\ q)$ のうちで，p の値が最小であるものは $p=$ キ ，$q=$ ク であり，方程式 $3x+8y=20$ のすべての整数解は，整数 n を用いて

$x=$ ケコ $+$ サ n，$y=$ ク $-$ シ n

と表すことができる。

（2は次ページに続く。）

(4)　$M=$ ウ とする。3gと8gの分銅を，他の質量の分銅の組み合わせに変えると，分銅をどのようにのせても天秤ばかりが釣り合わない場合がある。この場合の分銅の質量の組み合わせを，次の⓪～③のうちから**すべて選べ**。ただし，2種類の分銅は，皿A，皿Bのいずれにも何個でものせることができるものとする。 ス

⓪　3gと14g　　①　3gと21g

②　8gと14g　　③　8gと21g

(②は次ページに続く。)

(5) 皿Ａには物体Ｘのみをのせ，３ｇと８ｇの分銅は皿Ｂにしかのせられないとすると，天秤ばかりを釣り合わせることでは M の値を量ることができない場合がある。このような自然数 M の値は [セ] 通りあり，そのうち最も大きい値は [ソタ] である。

ここで，$M>$ [ソタ] であれば，天秤ばかりを釣り合わせることで M の値を量ることができる理由を考えてみよう。x を 0 以上の整数とするとき，

(i) $3x+8\times 0$ は 0 以上であって，3 の倍数である。

(ii) $3x+8\times 1$ は 8 以上であって，3 で割ると 2 余る整数である。

(iii) $3x+8\times 2$ は 16 以上であって，3 で割ると 1 余る整数である。

[ソタ] より大きな M の値は，(i)，(ii)，(iii)のいずれかに当てはまることから，0 以上の整数 x，y を用いて $M=3x+8y$ と表すことができ，３ｇの分銅 x 個と８ｇの分銅 y 個を皿Ｂにのせることで M の値を量ることができる。

このような考え方で，0 以上の整数 x，y を用いて $3x+2018y$ と表すことができないような自然数の最大値を求めると，[チツテト] である。

3　n を 3 以上の整数とする。紙に正方形のマスが縦横とも $(n-1)$ 個ずつ並んだマス目を書く。その $(n-1)^2$ 個のマスに，以下の**ルール**に従って数字を一つずつ書き込んだものを「方盤」と呼ぶことにする。なお，横の並びを「行」，縦の並びを「列」という。

ルール：上から k 行目，左から ℓ 列目のマスに，k と ℓ の積を n で割った余りを記入する。

$n=3$，$n=4$ のとき，方盤はそれぞれ下の図 1，図 2 のようになる。

1	2
2	1

図 1

1	2	3
2	0	2
3	2	1

図 2

例えば，図 2 において，上から 2 行目，左から 3 列目には，$2\times3=6$ を 4 で割った余りである 2 が書かれている。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=8$ のとき，下の図 3 の方盤の A に当てはまる数を答えよ。［ア］

		A				

図 3

また，図 3 の方盤の上から 5 行目に並ぶ数のうち，1 が書かれているのは左から何列目であるかを答えよ。左から［イ］列目

（3は次ページに続く。）

(2) $n=7$ のとき，下の図4のように，方盤のいずれのマスにも0が現れない。

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

図4

このように，方盤のいずれのマスにも0が現れないための，n に関する必要十分条件を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 ウ

⓪ n が奇数であること。

① n が4で割って3余る整数であること。

② n が2の倍数でも5の倍数でもない整数であること。

③ n が素数であること。

④ n が素数ではないこと。

⑤ $n-1$ と n が互いに素であること。

(3は次ページに続く。)

(3) n の値がもっと大きい場合を考えよう。方盤においてどの数字がどのマスにあるかは，整数の性質を用いると簡単に求めることができる。

$n=56$ のとき，方盤の上から 27 行目に並ぶ数のうち，1 は左から何列目にあるかを考えよう。

(i) 方盤の上から 27 行目，左から ℓ 列目の数が 1 であるとする（ただし，$1 \leqq \ell \leqq 55$）。ℓ を求めるためにはどのようにすれば良いか。正しいものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。 エ

⓪ 1 次不定方程式 $27\ell-56m=1$ の整数解のうち，$1 \leqq \ell \leqq 55$ を満たすものを求める。

① 1 次不定方程式 $27\ell-56m=-1$ の整数解のうち，$1 \leqq \ell \leqq 55$ を満たすものを求める。

② 1 次不定方程式 $56\ell-27m=1$ の整数解のうち，$1 \leqq \ell \leqq 55$ を満たすものを求める。

③ 1 次不定方程式 $56\ell-27m=-1$ の整数解のうち，$1 \leqq \ell \leqq 55$ を満たすものを求める。

(ii) (i)で選んだ方法により，方盤の上から 27 行目に並ぶ数のうち，1 は左から何列目にあるかを求めよ。左から オカ 列目

（3は次ページに続く。）

(4) $n=56$ のとき，方盤の各行にそれぞれ何個の 0 があるか考えよう。

(i) 方盤の上から 24 行目には 0 が何個あるか考える。

左から ℓ 列目が 0 であるための必要十分条件は，24ℓ が 56 の倍数であること，すなわち，ℓ が [キ] の倍数であることである。したがって，上から 24 行目には 0 が [ク] 個ある。

(ii) 上から 1 行目から 55 行目までのうち，0 の個数が最も多いのは上から何行目であるか答えよ。上から [ケコ] 行目

(5) $n=56$ のときの方盤について，正しいものを，次の⓪〜⑤のうちから**すべて選べ**。
[サ]

⓪ 上から 5 行目には 0 がある。
① 上から 6 行目には 0 がある。
② 上から 9 行目には 1 がある。
③ 上から 10 行目には 1 がある。
④ 上から 15 行目には 7 がある。
⑤ 上から 21 行目には 7 がある。

第７講　図形の性質

1　△ABC において，辺 BC を 7：1 に内分する点を D とし，辺 AC を 7：1 に内分する点を E とする。線分 AD と線分 BE の交点を F とし，直線 CF と辺 AB の交点を G とすると

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{ア}},\quad \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CDG}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{BFG}\text{ の面積}}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

となる。

（1は次ページに続く。）

4点B，D，F，Gが同一円周上にあり，かつFD＝1のとき

AB＝ **ケコ**

である。さらに，AE＝$3\sqrt{7}$ とするとき，AE・AC＝ **サシ** であり

∠AEG＝ **ス**

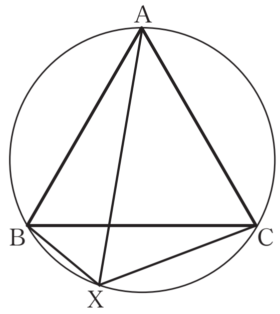
である。 ス に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ ∠BGE　　① ∠ADB　　② ∠ABC　　③ ∠BAD

[2] ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次の**問題１**が宿題として出された。下の問いに答えよ。なお，円周上に異なる２点をとった場合，弧は二つできるが，本問題において，弧は二つあるうちの小さい方を指す。

問題１ 正三角形 ABC の外接円の弧 BC 上に点 X があるとき，

AX＝BX＋CX が成り立つことを証明せよ。



(1) **問題１**は次のような構想をもとにして証明できる。

線分 AX 上に BX＝B′X となる点 B′ をとり，B と B′ を結ぶ。
AX＝AB′＋B′X なので，AX＝BX＋CX を示すには，AB′＝CX を示せばよく，AB′＝CX を示すには，二つの三角形 [ア] と [イ] が合同であることを示せばよい。

[ア]，[イ] に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。
ただし，[ア]，[イ] の解答の順序は問わない。

⓪ △ABB′	① △AB′C	② △ABX	③ △AXC
④ △BCB′	⑤ △BXB′	⑥ △B′XC	⑦ △CBX

（[2]は次ページに続く。）

太郎さんたちは，次の日の数学の授業で**問題１**を証明した後，点 X が弧 BC 上にないときについて先生に質問をした。その質問に対して先生は，一般に次の**定理**が成り立つことや，その**定理**と**問題１**で証明したことを使うと，下の**問題２**が解決できることを教えてくれた。

定理　平面上の点 X と正三角形 ABC の各頂点からの距離 AX，BX，CX について，点 X が三角形 ABC の外接円の弧 BC 上にないときは，

$AX < BX + CX$ が成り立つ。

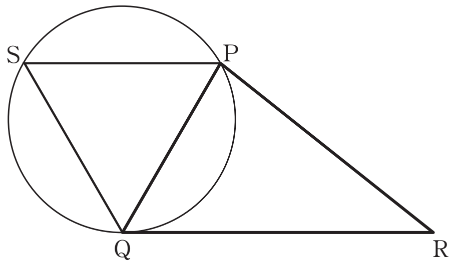
問題２　三角形 PQR について，各頂点からの距離の和 $PY + QY + RY$ が最小になる点 Y はどのような位置にあるかを求めよ。

（２は次ページに続く。）

(2)　太郎さんと花子さんは**問題 2** について，次のような会話をしている。

花子：**問題 1** で証明したことは，二つの線分 BX と CX の長さの和を一つの線分 AX の長さに置き換えられるってことだよね。

太郎：例えば，下の図の三角形 PQR で辺 PQ を 1 辺とする正三角形をかいてみたらどうかな。ただし，辺 QR を最も長い辺とするよ。辺 PQ に関して点 R とは反対側に点 S をとって，正三角形 PSQ をかき，その外接円をかいてみようよ。



花子：正三角形 PSQ の外接円の弧 PQ 上に点 T をとると，PT と QT の長さの和は線分 **ウ** の長さに置き換えられるから，

PT＋QT＋RT＝ ウ ＋RT になるね。

太郎：**定理**と**問題 1** で証明したことを使うと**問題 2** の点 Y は，点 **エ** と点 **オ** を通る直線と **カ** との交点になることが示せるよ。

花子：でも, ∠QPR が **キ** ° より大きいときは, 点 エ と点 オ を通る直線と カ が交わらないから，∠QPR が キ ° より小さいときという条件がつくよね。

太郎：では，∠QPR が キ ° より大きいときは，点 Y はどのような点になるのかな。

(i)　**ウ** に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ PQ　　① PS　　② QS
③ RS　　④ RT　　⑤ ST

（②は次ページに続く。）

(ii) エ , オ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし， エ , オ の解答の順序は問わない。

⓪ P　① Q　② R　③ S　④ T

(iii) カ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 辺 PQ　① 辺 PS　② 辺 QS
③ 弧 PQ　④ 弧 PS　⑤ 弧 QS

(iv) キ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

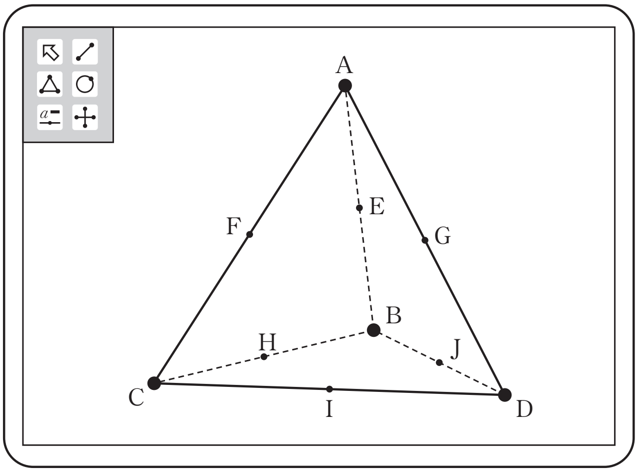
⓪ 30　① 45　② 60　③ 90
④ 120　⑤ 135　⑥ 150

(v) ∠QPR が キ °より「小さいとき」と「大きいとき」の点 Y について正しく述べたものを，それぞれ次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

小さいとき ク　　大きいとき ケ

⓪ 点 Y は，三角形 PQR の外心である。
① 点 Y は，三角形 PQR の内心である。
② 点 Y は，三角形 PQR の重心である。
③ 点 Y は，∠PYR＝∠QYP＝∠RYQ となる点である。
④ 点 Y は，∠PQY＋∠PRY＋∠QPR＝180° となる点である。
⑤ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も短い辺を除く二つの辺の交点である。
⑥ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も長い辺を除く二つの辺の交点である。

3　花子さんと太郎さんは，正四面体ABCDの各辺の中点を次の図のようにE，F，G，H，I，Jとしたときに成り立つ性質について，コンピュータソフトを使いながら，下のように話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。



花子：四角形FHJGは平行四辺形に見えるけれど，正方形ではないかな。

太郎：4辺の長さが等しいことは，簡単に証明できそうだよ。

（3は次ページに続く。）

(1) 太郎さんは四角形 FHJG の 4 辺の長さが等しいことを，次のように証明した。

太郎さんの証明

[ア] により，四角形 FHJG の各辺の長さはいずれも正四面体 ABCD の 1 辺の長さの [イ] 倍であるから，4 辺の長さが等しくなる。

(i) [ア] に当てはまる最も適当なものを，次の⓪〜④のうちから一つ選べ。

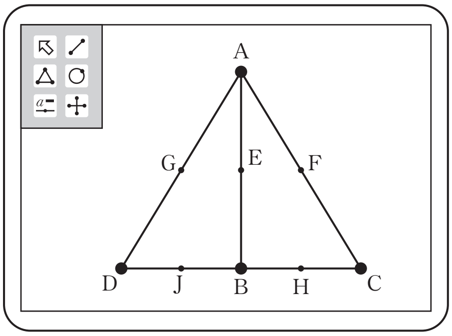
⓪ 中線定理　① 方べきの定理　② 三平方の定理
③ 中点連結定理　④ 円周角の定理

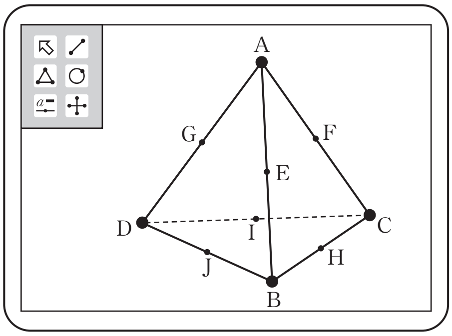
(ii) [イ] に当てはまるものを，次の⓪〜④のうちから一つ選べ。

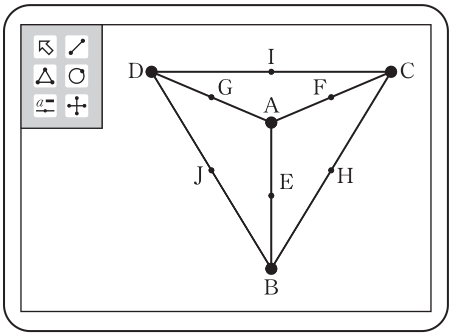
⓪ 2　① $\frac{3}{4}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$

(3は次ページに続く。)

(2)　花子さんは，太郎さんの考えをもとに，正四面体をいろいろな方向から見て，四角形 FHJG が正方形であることの証明について，下のような構想をもとに，実際に証明した。







花子さんの構想

四角形において，4 辺の長さが等しいことは正方形であるための [ウ]。さらに，対角線 FJ と GH の長さが等しいことがいえれば，四角形 FHJG が正方形であることの証明となるので，△FJC と △GHD が合同であることを示したい。

しかし，この二つの三角形が合同であることの証明は難しいので，別の三角形の組に着目する。

(3は次ページに続く。)

花子さんの証明

点F，点Gはそれぞれ AC，ADの中点なので，二つの三角形 [エ] と [オ] に着目する。[エ] と [オ] は3辺の長さがそれぞれ等しいので合同である。このとき，[エ] と [オ] は [カ] で，FとGはそれぞれ AC，ADの中点なので，FJ＝GHである。

よって，四角形FHJGは，4辺の長さが等しく対角線の長さが等しいので正方形である。

(i) [ウ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(ii) [エ]，[オ] に当てはまるものが，次の⓪～⑤の中にある。当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，[エ] と [オ] の解答の順序は問わない。

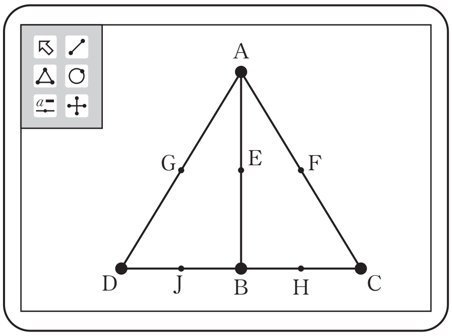
⓪ △AGH　① △AIB　② △AJC
③ △AHD　④ △AHC　⑤ △AJD

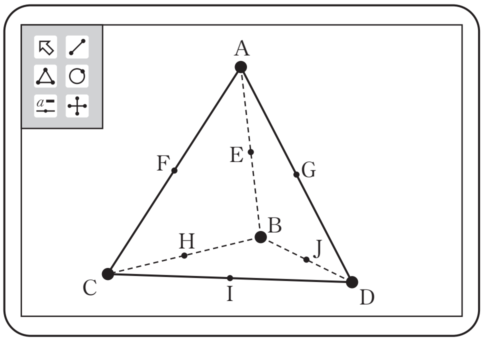
(iii) [カ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 正三角形　① 二等辺三角形
② 直角三角形　③ 直角二等辺三角形

（3は次ページに続く。）

四角形FHJGが正方形であることを証明した太郎さんと花子さんは，さらに，正四面体ABCDにおいて成り立つ他の性質を見いだし，下のように話している。





花子：線分EIと辺CDは垂直に交わるね。

太郎：そう見えるだけかもしれないよ。証明できる？

花子：(a)辺CDは線分AIともBIとも垂直だから，(b)線分EIと辺CDは垂直といえるよ。

太郎：そうか……。ということは，(c)この性質は，四面体ABCDが正四面体でなくても成り立つ場合がありそうだね。

(3)　下線部(a)から下線部(b)を導く過程で用いる性質として正しいものを，次の⓪～④のうちから**すべて選べ**。 キ

⓪　平面α上にある直線ℓと平面α上にない直線mが平行ならば，$\alpha /\!/ m$である。

①　平面α上にある直線ℓ，mが点Pで交わっているとき，点Pを通り平面α上にない直線nが直線ℓ，mに垂直ならば，$\alpha \perp n$である。

②　平面αと直線ℓが点Pで交わっているとき，$\alpha \perp \ell$ならば，平面α上の点Pを通るすべての直線mに対して，$\ell \perp m$である。

③　平面α上にある直線ℓ，mがともに平面α上にない直線nに垂直ならば，$\alpha \perp n$である。

④　平面α上に直線ℓ，平面β上に直線mがあるとき，$\alpha \perp \beta$ならば，$\ell \perp m$である。

（3は次ページに続く。）

(4) 下線部(c)について，太郎さんと花子さんは正四面体でない場合についても考えてみることにした。

四面体 ABCD において，AB，CD の中点をそれぞれ E，I とするとき，下線部(b)が常に成り立つ条件について，次のように考えた。

太郎さんが考えた条件：AC＝AD，BC＝BD

花子さんが考えた条件：BC＝AD，AC＝BD

四面体 ABCD において，下線部(b)が成り立つ条件について正しく述べているものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ク

⓪ 太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても常に成り立つ。

① 太郎さんが考えた条件では常に成り立つが，花子さんが考えた条件では必ずしも成り立つとは限らない。

② 太郎さんが考えた条件では必ずしも成り立つとは限らないが，花子さんが考えた条件では常に成り立つ。

③ 太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても必ずしも成り立つとは限らない。

第８講　実践演習問題 第１問

第１問 （必須問題）

〔１〕

(1) 実数 x について，条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とし，以下のように定める。

条件 p：x は 4 の倍数である。

条件 q：x は 2 の倍数である。

命題「$p \Rightarrow q$」は真であるが，このとき成り立つ関係を表す記号を次の⓪～⑤の中から二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。［ア］，［イ］

⓪ $P \subset Q$　① $P \supset Q$　② $\overline{P} \subset Q$

③ $P \supset \overline{Q}$　④ $\overline{P} \subset \overline{Q}$　⑤ $\overline{P} \supset \overline{Q}$

(2) 自然数 x，y について，条件 r，s を以下のように定める。

条件 r：$xy < 4$

条件 s：$x + y \leqq 3$

命題「$r \Rightarrow s$」が真であるか偽であるかを求め，真である場合はその証明を，偽である場合は考えられる反例をすべて表せ。

また，r であることは s であるための［ウ］である。［ウ］に入るものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

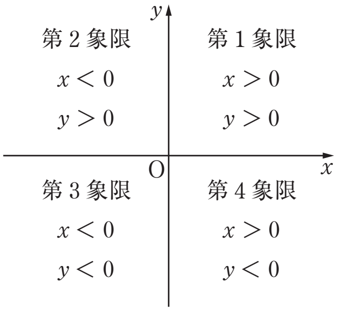
⓪ 必要十分条件である。

① 必要条件であるが，十分条件ではない。

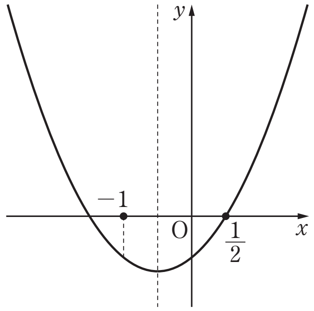
② 十分条件であるが，必要条件ではない。

③ 必要条件でも十分条件でもない。

〔２〕 座標平面は，x 軸，y 軸によって，4 つの部分に分けられる。これらの部分を「象限」といい，右の図のように「第 1 象限」，「第 2 象限」，「第 3 象限」，「第 4 象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



(1) 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフは右図のようになっていた。このとき，次の値の符号について正しいものを，次の⓪～②のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。



a は [エ]
b は [オ]
a^2-4b は [カ]
$a+b+1$ は [キ]

⓪ 正　　① 0　　② 負

(2) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ において，$y=f(x)$ のグラフがすべての象限を通るための条件を求める。

(i) $a=0$ のとき，グラフは直線になるので，すべての象限を通ることはできない。

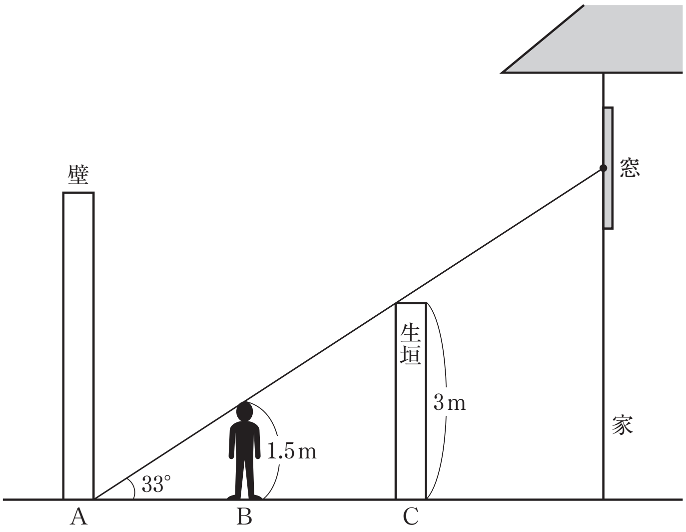
(ii) $a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線だから，第 1 象限と第 2 象限は必ず通る。第 3 象限と第 4 象限を通るための条件は，頂点の y 座標と $f(0)$ の符号に注目して，[ク] となる。

(iii) $a<0$ のときも同様に考えて，求める条件は [ケ] となる。

[ク]，[ケ] に当てはまるものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ $b>0$　　① $b<0$　　② $b\geqq 0$　　③ $b\leqq 0$
④ $c>0$　　⑤ $c<0$　　⑥ $c\geqq 0$　　⑦ $c\leqq 0$

〔3〕 下の図のように建築中の家があり，地点 C に高さ 3 メートルの生垣がある。家の前の通りを歩く人からできるだけ部屋の中を見られないようにしたいと考えているが，生垣で窓が全く見えなくなるのは身長 150 cm の子どもが通りを歩いたときに生垣から何メートル離れた地点までか考えたい。子どもの位置を B とする。地点 A は通りの向かい側の壁の立つ場所であり，地点 A と生垣の一番上までの地面とのなす角は 33° である。BC の長さを角度 33° の三角比の値を用いて表せ。ただし，壁，生垣と子どもの体の幅は考えないものとする。



〔4〕 三角形ABCの辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cとし，∠CAB，∠ABC，∠BCAの大きさをそれぞれA，B，Cとする。

健一さんと由美子さんは三角形ABCについて

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　…(＊)

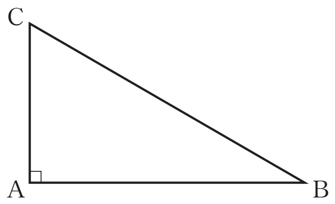
が成り立つことを知り，その理由について，考察することにした。

(＊)は一般的に余弦定理と呼ばれており，三角形が成立していれば常に成り立つことがわかっている。

(1) 健一さんはまず直角三角形の場合を次のように考察した。

《健一さんの直角三角形についての考察》

右図のような，$A=90^\circ$の直角三角形を考える。



三平方の定理から

$$a^2=b^2+c^2$$

が成立する。$A=90^\circ$のとき，

$\cos A=$ コ

なので，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

よって，$A=90^\circ$であれば，(＊)が成り立つ。

コ に当てはまるものを次の⓪～④のうちから一つ選べ。

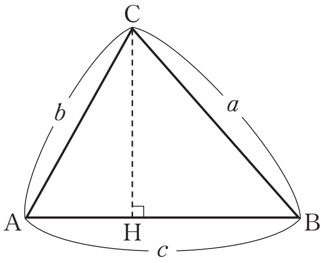
⓪ 0　　① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　④ -1

(第1問〔4〕は次ページに続く。)

(2) 由美子さんは鋭角三角形でも(＊)が成り立つかどうかを考察した。

《由美子さんの鋭角三角形についての考察》

右図のように，鋭角三角形を考える。



点Cから辺ABへ垂線CHをおろし，

△ACHに着目すると，

AH＝[サ]

CH＝[シ]

となり，したがって，BH＝c－[サ] と表せる。

よって，△BCHにおいて三平方の定理より，

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2$

$=($[シ]$)^2+(c-$[サ]$)^2$

これを整理すると，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。

よって，鋭角三角形のときも(＊)は成り立つ。

[サ]，[シ] に当てはまる最も適当なものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ $a\sin A$　① $a\sin B$　② $b\cos A$　③ $b\cos B$

④ $a\tan A$　⑤ $b\sin A$　⑥ $b\tan A$　⑦ $b\tan B$

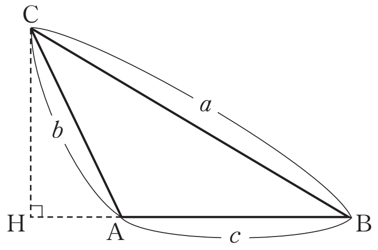
(第1問〔4〕は次ページに続く。)

(3) 最後に2人は鈍角三角形についても(＊)が成り立つかどうか考察した。

《2人の鈍角三角形についての考察》

A が鈍角の三角形を右図のように考える。

点Cから直線ABに垂線CHを下ろす。



$\angle$CAH＝180°－A となるので，

sin(180°－A)＝ ス

cos(180°－A)＝ セ

を利用すると，

AH＝ ソ

CH＝ タ

となるので，△BCH において三平方の定理より，

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2$

$=(\mathrm{BA}+\mathrm{AH})^2+\mathrm{CH}^2$

であるので，これに BA＝c，AH＝ ソ ，CH＝ タ を代入して整理すると，

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

よって，鈍角三角形のときも(＊)は成り立つ。

ス ， セ ， ソ ， タ に当てはまる最も適当なものを次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。

⓪	$\sin A$	①	$-\sin A$	②	$\cos A$	③	$-\cos A$	④	$b\sin A$
⑤	$b\cos A$	⑥	$a\sin A$	⑦	$a\cos A$	⑧	$-b\sin A$	⑨	$-b\cos A$

第9講 実践演習問題 第2問

第2問 （必須問題）

〔1〕 x を正の実数とする。AC＝6，BC＝x，∠A＝60° であるような，△ABC がただ一つに定まるための x の条件を太郎さん，花子さんはそれぞれ次のように考えた。

(1) まず太郎さんは，正弦定理を利用して考えた。

辺ACの長さがわかっているから，

$$\sin B=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{x}$$

となる。$x=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ のとき，$B=\boxed{ウエ}^\circ$ となり，△ABC はただ一つに決まる。

また，$0^\circ<B<\boxed{オカキ}^\circ$ であるから，$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{x}\leqq\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$，

つまり $x\geqq\boxed{コ}$ のとき，△ABC はただ一つに決まる。

（第2問〔1〕は次ページに続く。）

(2)　次に花子さんは，余弦定理を利用する方法を考えた。

（i）　AB＝t とおくと，［サ］＝0 のような関係式ができる。次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$t^2+6t+36-x^2$　①　$t^2-6t+36-x^2$　②　$t^2-6t-36-x^2$
③　$t^2+6t-36+x^2$　④　$t^2-12t-36+x^2$　⑤　$t^2+12t+36-x^2$

（ii）　この［サ］＝0 を t の 2 次方程式とみたとき，どのような条件を満たすべきか，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。［シ］

⓪　t の 2 次方程式が，重解をもつ。
①　t の 2 次方程式が，正の解を 2 つもつ。
②　t の 2 次方程式が，正の解を 1 つだけもつ。
③　t の 2 次方程式が，異なる 2 つの実数解をもつ。
④　t の 2 次方程式が，少なくとも 1 つの実数解をもつ。

さらに，$f(t)=$［サ］とおき，$f(t)=0$ の判別式を D とすると，［シ］の条件をみたすためには，［ス］または［セ］であればよい。

(iii)　［ス］，［セ］に当てはまるものとして最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順番は問わない。

⓪　$D>0$　①　$D=0$　②　$D<0$　③　$D\geqq 0$　④　$D\leqq 0$
⑤　$f(0)>0$　⑥　$f(0)=0$　⑦　$f(0)<0$　⑧　$f(0)\geqq 0$　⑨　$f(0)\leqq 0$

〔２〕 あるクラスの生徒 10 人に対して，20 点満点の数学のテストと 100 満点の英語のテストを実施した。

生徒 10 人のテストの結果は以下のような点数となった。

生徒	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
数学	7	8	9	10	11	12	13	15	17	18
英語	55	70	55	80	60	60	50	65	55	50

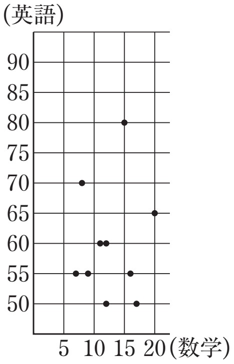
(1) 数学の点数について，次のそれぞれの値を求めよ。

平均値 [ソタ]

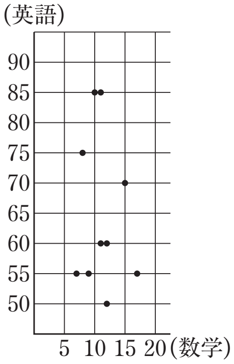
分散 [チツ.テ]

(2) 英語と数学の点数について散布図に表した。正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。[ト]

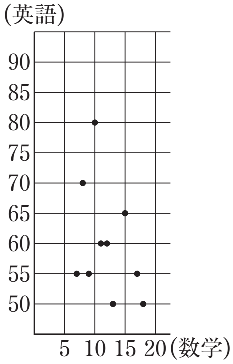
⓪



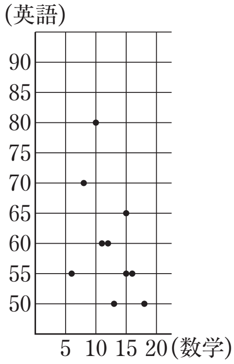
①



②



③



(第２問〔２〕は次ページに続く。)

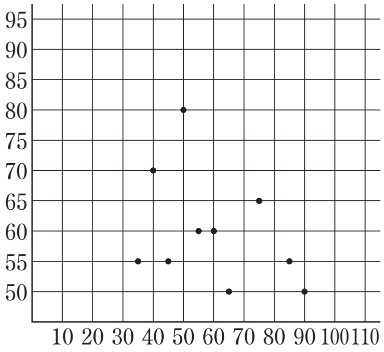
さらに，数学の点数の分散を X，英語の点数の分散を Y とし，数学の点数と英語の点数の共分散を A で表すこととする。

後日，生徒 10 人の成績をまとめることにした。数学の点数を 100 点満点にするために，全員の点数を 5 倍し，さらに基礎点数 5 点を加点した。また，全員の英語の点数に基礎点数 5 点を加算した。このとき点数の変更後の数学の点数の分散を X'，英語の点数の分散を Y'，数学の点数と英語の点数の共分散を A' で表す。

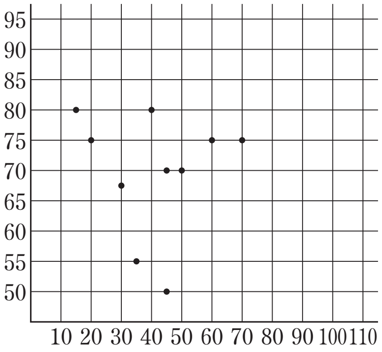
(3)　数学の点数を 5 倍した後の散布図として正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

ナ

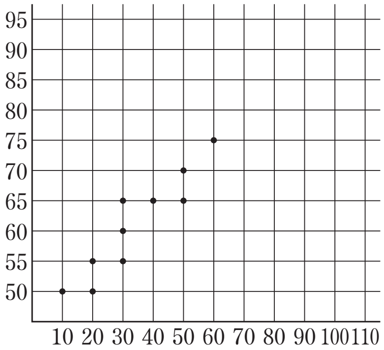
⓪



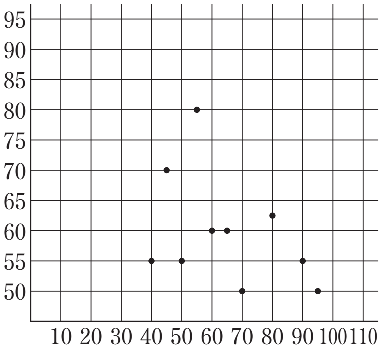
①



②



③



(第２問〔２〕は次ページに続く。)

また，分散や共分散について点数の変更前と変更後がどのように変化するかを考えてみる。

このとき，各値の偏差がどのように変化するかを考えていくことにして，生徒10人の変更前の英語の点数をそれぞれ y_1，y_2，y_3，…，y_9，y_{10} とし，その平均値を $\overline{y}$ とすれば，各点数に5点を加算したときの平均値は

$$\overline{y}+5\text{(点)}$$

であるので，偏差はそれぞれ

$$y_1+5-(\overline{y}+5),\ y_2+5-(\overline{y}+5),\ \cdots,\ y_{10}+5-(\overline{y}+5)$$

となる。したがって，その分散 Y' を，Y を用いて表すと，

$$Y'=\frac{1}{10}[\{y_1+5-(\overline{y}+5)\}^2+\{y_2+5-(\overline{y}+5)\}^2+\cdots+\{y_{10}+5-(\overline{y}+5)\}^2]$$

より，$\dfrac{Y'}{Y}=$ [ニ] である。

同様に考えて，

$$\frac{X'}{X}=\boxed{\text{ヌ}}$$

$$\frac{A'}{A}=\boxed{\text{ネ}}$$

(4) [ニ]，[ヌ]，[ネ] に当てはまる数を次の⓪～⑥のうちからそれぞれ一つ選んで答えよ。

⓪ 0　① 1　② 5　③ 25

④ −1　⑤ −5　⑥ −25

(5) 後日，クラスの生徒10人のうち，1人が転校して9人となったが平均値は数学，英語ともに変わらなかった。転出した生徒は [ノ] である。また，英語について，10人のときの分散の値は Y であるが，残った9人についての分散の値を Y'' とすると，

$$\frac{Y''}{Y}=\frac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

が成り立つ。

＜ NOTE ＞

第 10 講　実践演習問題 第３問～第５問

第３問 （選択問題）

大相撲では，しばしば巴戦により優勝決定が行われている。

花子さんと太郎さんは確率を利用して，優勝者が決まる確率について考えてみることにした。

今回は，A，B，C の 3 人が以下のルールに従って優勝決定戦を行う。

《ルール》

・ 1 回戦は A と B が対戦する。2 回戦は 1 回戦の勝者と C が対戦する。

・以下同様に，対戦ごとの勝者と控えの者が次の対戦を行うものとする。

・だれかが 2 連勝した時点で，その者が優勝者とする。

ただし，各対戦において，どちらかが勝つ確率は等しく $\frac{1}{2}$ とする。

(1)　2 回戦で優勝者となることができるのは，［ア］である。［ア］に当てはまるものを次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪　A だけ　①　B だけ　②　C だけ　③　A，B

④　B，C　⑤　A，C　⑥　A，B，C

また，2 回戦で優勝者が決まる確率は，$\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

(第３問は次ページに続く。)

(2)　3回戦で優勝者となることができるのは，［エ］である。［エ］に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　A　　①　B　　②　C　　③　A，C
④　B，C　　⑤　A，B，C

また，3回戦で優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

したがって，3回戦以内に優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

（第3問は次ページに続く。）

4回戦以上で優勝者が決まることについて，花子さん，太郎さんは次のような話をした。

> 花子：巴戦では優勝するための条件に差はあるのかな？
> 太郎：今考えているA，B，Cの3人での場合でも，1回戦から出場するAもしくはBの方が優勝する確率はCより高そうだね。
> 花子：じゃあ，4回戦以降も試合が続く場合を考えてみようよ。

(3) 4回戦まであった場合，4回戦に出場できないのは [ケ] である。[ケ] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ A　　① B　　② C　　③ A，C
④ B，C

4回戦で優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(4) 5回戦が終了した時点で優勝者が決まっていない場合，6回戦で対戦するのは [シ] または [ス] である。[シ]，[ス] に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ AとB　　① BとC　　② AとC

5回戦が終了した時点で優勝者が決まっていないときの確率は，$\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(第3問は次ページに続く。)

(5) 5回戦以内にAが優勝者と決まる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

A，B，Cの3人のうち，5回戦以内に優勝する確率が最も高いのは，$\boxed{\text{ナ}}$ である。$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪ A　① B　② C　③ A，B
④ A，C　⑤ B，C

第４問 （選択問題）

ある商品開発で，A，B，C の新商品を考えて，次のような条件で試行販売をした。下記はその結果である。これをもとにして，花子さんと太郎さんは，3 つの新商品 A，B，C の売れた個数をそれぞれ求めてみた。

- 新商品 A，B，C はそれぞれ 1000 円，600 円，200 円で販売した。
- 売上高は合計で 52600 円であった。
- 新商品 B の売れた個数は，新商品 C の売れた個数の 2 倍より 1 個少なかった。
- 売れなかった商品はなかった。

(1) 花子さんは，新商品 A，B，C の売れた個数をそれぞれ x 個，y 個，z 個とし，売上高が 52600 円であるから，

$$1000x+600y+200z=52600$$

と式を立てた。この両辺を 200 で割ると，

$$5x+3y+z=263 \quad \cdots\cdots①$$

となる。また，新商品 B，C について，y と z の関係式 [ア] が成り立つ。

[ア] に当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $y=2z+1$　① $y=2z-1$　② $z=2y+1$　③ $z=2y-1$

①に [ア] を代入すると，関係式 [イ] ができる。[イ] に当てはまる式を次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $5x+7z=264$　① $5x+7z=266$　② $5x+7y=263$

③ $5x+7z=263$

(第４問は次ページに続く。)

(2)　さらに，2人は次のように考えた。

> 太郎：花子さんが作った［イ］の式から何がわかるかな。
> 花子：［イ］の式は次のように変形できるんじゃないかな。
>
> $$7(z-38)=5\times(-x)\quad\cdots\cdots②$$
>
> すると，5と7は［ウ］だから，$z-38$ は，［エ］となるね。
> よって，k を整数として$z-38=5k$と表せる。
> これより，②において，k を用いて，$x=$［オカ］k とできるね。
> 太郎：それでもいいけど，②の式を直接変形して，
>
> $$z=38-\frac{5}{7}x$$
>
> とすれば同じことがいえるね。
> 花子：ほんとうだ。そうすると，試行販売したときに売れた合計の個数が最も大きくなる売り方と，合計の個数が最も小さくなる売り方はどうなるのかな。

［ウ］が［エ］の直接の根拠となるとき，［ウ］，［エ］に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

⓪　整数　　①　互いに素　②　自然数　　③　3の倍数
④　5の倍数　⑤　7の倍数

(3)　(1)より，新商品A，B，Cの売れた個数を x と z のみを用いて表すと，［キ］個となる。このとき，(2)の条件を考えると，
新商品A，B，Cの売れた合計の個数が最も大きいとき，
$x=$［ク］，$y=$［ケコ］，$z=$［サシ］
合計の個数が最も小さいとき，
$x=$［スセ］，$y=$［ソ］，$z=$［タ］
となる。

［キ］に当てはまる式を次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$3x+3z-1$　①　$x+z-1$　②　$x+3z+3$　③　$x+3z-3$
④　$x+3z-1$　⑤　$x-3z-1$

第５問 （選択問題）

太郎さんと花子さんは，今日，三角形の五心について学習し，授業中に次の課題が出された。

《次回までの課題》

△ABC の内部に点 P があり，∠BAC＝70° であるとき，点 P が

❶ △ABC の外心

❷ △ABC の垂心

❸ △ABC の内心

であるときの ∠BPC の大きさを調べなさい。

(1) 授業の課題について，太郎さんと花子さんは次のように話し合っている。

太郎：❶の点 P が △ABC の外心のときを考えよう。

授業で習った外心はこうだったね。

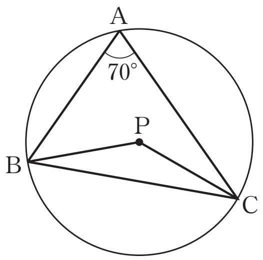
《外心》…三角形の 3 つの辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

その点を三角形の外心という。

花子：まず図を描いてみよう。△ABC の外心が点 P のとき，右図のようになるね。これは，習った外心の性質を使わなくても円周角と中心角の関係より，

∠BPC＝2×∠ ア となるから，

∠BPC＝ イウエ ° …(A)とわかるね。



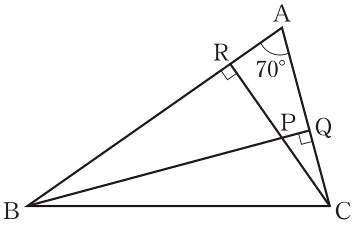
(i) ア に当てはまるものを次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ ABC　① ACB　② PBC　③ PCB　④ BAC

(第５問は次ページに続く。)

太郎：❷の点Ｐが△ABCの垂心となるときを考えよう。授業で習った垂心はこうだね。

《垂心》…三角形の３つの頂点からそれぞれの対辺，またはその延長にひいた垂線は１点で交わる。その点を三角形の垂心という。

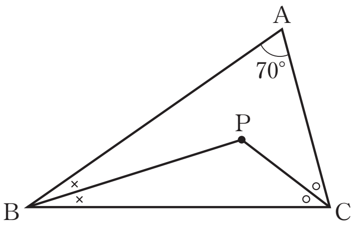


右図のように直線BP，CPが辺AC，ABと交わる点をそれぞれQ，Rとすると，四角形ARPQの内角の和に注目すれば，∠RPQ＝ **オカキ** °　…(B)となるね。

花子：次に❸の内心を考えよう。授業で習った内心はこうだね。

《内心》…三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる。その点を三角形の内心という。

点Ｐが△ABCの内心のとき，



∠PBC＋∠PCB

$=\dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}}(\angle\text{ABC}+\angle\text{ACB})$

$=\dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}}(180^\circ-\angle\text{BAC})$

より，∠BPC＝ **ケコサ** °　…(C)である。

このとき，∠BPC＝ **シ** の関係式が成り立っているよ。

(ii) **シ** に当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$90^\circ+\angle\text{PBC}+\angle\text{PCB}$　　①　$\angle\text{A}+90^\circ$

②　$\dfrac{1}{2}\angle\text{A}+90^\circ$　　③　$180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle\text{A}$

(第５問は次ページに続く。)

太郎：❶～❸のとき，大小関係は [ス] のようになるよ。

(iii) [ス] に当てはまるものを，次の⓪～④より一つ選べ。

⓪ (A)＞(B)＞(C)　① (B)＞(A)＞(C)　② (C)＞(A)＞(B)
③ (B)＞(C)＞(A)　④ (A)＞(C)＞(B)

花子：❶～❸の点Pが，すべて一致することってあるのかしら。

太郎：△ABCが [セ] のときには，∠BPC＝[ソ] で一致することがわかったよ。

(iv) [セ]，[ソ] に当てはまるものを次の⓪～⑧より一つずつ選べ。

⓪ 直角三角形　① 直角二等辺三角形　② 鋭角三角形　③ 正三角形
④ 鈍角三角形　⑤ 90°　⑥ 120°　⑦ 135°　⑧ 150°

（第５問は次ページに続く。）

(2) 次の授業で，先生は，前回の課題に付け加えて，次の課題を出した。

《次の課題》

$\angle A=90^\circ$，AB＝12，AC＝5 である △ABC がある。点 P が次のような点であるとき，AP の長さの大小について調べよ。

❶ 点 P が △ABC の外心

❷ 点 P が △ABC の垂心

❸ 点 P が △ABC の内心

太郎：❶のときは，点 P は [タ] であるから，AP＝[チ] …(D)だね。

花子：❷のときは，点 P は [ツ] であるから，AP＝[テ] …(E)だね。

太郎：❸のときは，AP は 1 辺の長さ [ト] の正方形の対角線の長さに等しいから，AP＝[ナ] …(F)だね。

(i) [タ]，[チ]，[ツ]，[テ]，[ト]，[ナ] に当てはまるものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。同じものを 2 回以上使ってもよい。

⓪ 0　① $\dfrac{13}{3}$　② $\dfrac{13}{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$

⑤ 頂点A　⑥ 斜辺の中点　⑦ 頂点B

花子：これより，AP の長さの大小は [ニ] のように決定するよ。

(ii) [ニ] に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ (D)＜(E)＜(F)　① (E)＜(F)＜(D)　② (D)＜(F)＜(E)

③ (E)＜(D)＜(F)　④ (F)＜(D)＜(E)　⑤ (F)＜(E)＜(D)

第１講　数学Ⅰ 小問集合

1 〔１〕

(1)　直線 ℓ の傾きが負となるのは $a^2-2a-8<0$ のとき

$(a+2)(a-4)<0$　　ゆえに　$-2<a<4$

(2)　$a^2-2a-8\neq0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b は

$0=(a^2-2a-8)b+a$　より　$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}$

$a>0$ のとき，$b>0$ となるのは $a^2-2a-8<0$ のとき

(1)より　$-2<a<4$　　ゆえに　$0<a<4$

$a\leqq0$ のとき，$b>0$ となるのは $a\neq0$ かつ $a^2-2a-8>0$ のとき

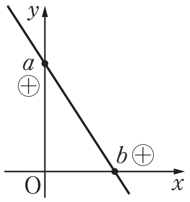
$(a+2)(a-4)>0$　$a<-2,\ 4<a$　　ゆえに　$a<-2$（$a\neq0$ を満たす）

（参考）

ℓ は傾き a^2-2a-8（$\neq0$），切片 a の直線

切片 $a>0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b が

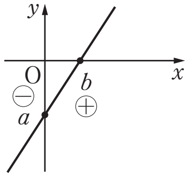
$b>0$ となるのは傾き $a^2-2a-8<0$ のとき



傾き＜0

切片 $a\leqq0$ のとき，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標 b が

$b>0$ となるのは $a\neq0$ かつ傾き $a^2-2a-8>0$ のとき



傾き＞0

$a=\sqrt{3}$ のとき

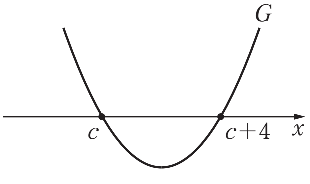
$$b=\frac{-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

〔２〕

(1)　$y=1\cdot(x-c)\{x-(c+4)\}$

$=x^2-(2c+4)x+c(c+4)$

よって　$G: y=x^2-2(c+2)x+c(c+4)$



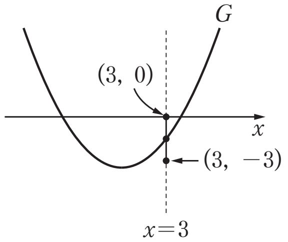
$x=3$ のとき　$y=3^2-2(c+2)\cdot3+c(c+4)$

$=c^2-2c-3$

よって，2点 $(3,\ 0)$，$(3,\ -3)$ を両端とする線分，

すなわち $x=3$ $(-3\leqq y\leqq 0)$ と G が共有点をもつのは，

$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0$ のとき



$-3\leqq c^2-2c-3$ より $c^2-2c\geqq 0$

$c(c-2)\geqq 0$ よって $c\leqq 0,\ 2\leqq c$

$c^2-2c-3\leqq 0$ より $(c-3)(c+1)\leqq 0$

よって $-1\leqq c\leqq 3$

したがって，$-1\leqq c\leqq 0,\ 2\leqq c\leqq 3$

(2) $2\leqq c\leqq 3$ のとき

G が点 $(3,\ -1)$ を通るのは $c^2-2c-3=-1$ $c^2-2c-2=0$ $c=1\pm\sqrt{3}$

$2\leqq c\leqq 3$ より $c=1+\sqrt{3}$

$G:y=\{x-(c+2)\}^2-(c+2)^2+c(c+4)=\{x-(c+2)\}^2-4$ より

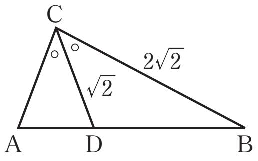
$c=1+\sqrt{3}$ のとき，グラフの頂点は $(3+\sqrt{3},\ -4)$

このグラフは，頂点が $(0,\ 0)$ である $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $3+\sqrt{3}$，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである。

また，このとき G と y 軸との交点の y 座標，すなわち G の切片は

(1)より $c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$

2 △BCD で余弦定理より



$$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

$BD>0$ より $BD=2$

$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)=\sin\angle BDC$ であり，

△BCD で余弦定理より $\cos\angle BDC=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって，$\sin\angle BDC=\sqrt{1-\cos^2\angle BDC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ より，

$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

CD は ∠ACB の二等分線であるから，AC：BC＝AD：BD

ゆえに $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

よって，$AC:AD=\sqrt{2}:1$ より，$AD=x$ とおくと，$AC=\sqrt{2}x$ と表される。

$\cos\angle ACD=\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ であるから，△ACD で余弦定理より

$$x^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}x)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2-3x+2=0 \qquad (x-1)(x-2)=0 \qquad x=1,\ 2$$

$x=2$ のとき，AD$=2$，AC$=2\sqrt{2}$ より，△ACB は AC$=$BC の二等辺三角形であり，点 D は辺 AB の中点であるから，CD⊥AB である。よって，$\sin\angle ADC=1$ となり，$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ であることに反し不適。

$x=1$ のとき，AD$=1$，AC$=\sqrt{2}$ より，△ACD は AC$=$DC の二等辺三角形。

よって，$\angle DAC=\angle ADC$ より $\sin\angle DAC=\sin\angle ADC$

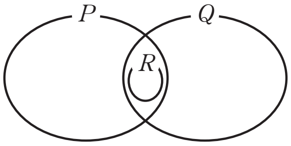
このとき，△ABC の外接円の半径を R とすると，△ABC で正弦定理より

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle DAC}=\frac{BC}{\sin\angle ADC} \qquad \text{ゆえに} \qquad R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

3〔1〕 $P\cap Q$ に属する自然数は，4 と 6 の最小公倍数 12 の倍数である。

また，ある自然数が 24 の倍数ならば 12 の倍数であるが，ある自然数が 12 の倍数であっても 24 の倍数ではないものが存在するので，$P\cap Q\supset R$ である。

したがって，ベン図は右図のようになる。



(1)　$32\in P$，$32\notin Q$ より，$32\in P\cap\overline{Q}$　(②)である。

(2)　$P\cap Q$ に属する最小の自然数は 12

また，$12\notin R$　(④)である。

(3)　(2)より，12 は「$(p$ かつ $q)\Rightarrow r$」(③)の反例である。

〔2〕

(1)　$\{1\}\subset A$　$(A\supset\{1\})$

(2)　⓪……$y=0$ は有理数。よって仮定を満たしていない。

①……x, y はともに無理数で，$x+y=(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)=2$ は有理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっている。

②……x，y はともに無理数で，$x+y=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は無理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっていない。

③……$x=\sqrt{4}=2$，$y=-\sqrt{4}=-2$ はともに有理数。よって仮定を満たしていない。

④……$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$y=1-2\sqrt{2}$ はともに無理数で，

$x+y=2\sqrt{2}+\left(1-2\sqrt{2}\right)=1$ は有理数である。よって，命題が偽であることを示す反例になっている。

⑤……x，y はともに無理数で，$x+y=\left(\sqrt{2}-2\right)+\left(\sqrt{2}+2\right)=2\sqrt{2}$ は無理数である。

よって，命題が偽であることを示す反例になっていない。

したがって，命題が偽であることを示す反例となる x，y の組は，①と④

第2講　2次関数

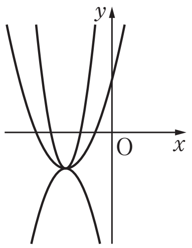
1 (1)　方程式 $f(x)=0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。

図1の放物線は x 軸の負の部分と異なる2点で交わっているので，方程式 $f(x)=0$ は異なる二つの負の解をもつ（①）

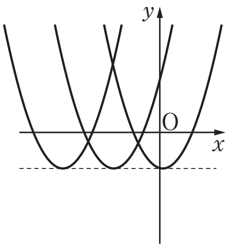
(2)　操作Aにより，頂点の位置はそのままに，グラフの開きや凸方向が変わる。

操作Pにより，グラフの形と頂点の y 座標は変わらず，頂点の x 座標が変わる。

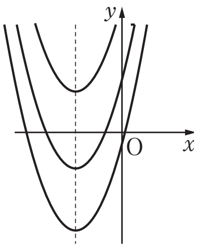
操作Qにより，グラフの形と頂点の x 座標は変わらず，頂点の y 座標が変わる。



操作A



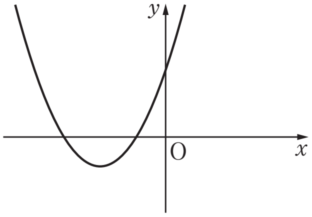
操作P



操作Q

よって，操作A，P，Qのうち，不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数，すなわち，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より常に上にある状態になるのは，操作Qだけである（③）。また，不等式 $f(x)>0$ の解がない，すなわち $y=f(x)$ のグラフが x 軸より常に下（または x 軸上）にある状態になるのは，操作Aだけである（①）。

2 (1)　図1より，グラフは下に凸の放物線であるから



$a>0$ ……①

また，y 切片は正より $c>0$ ……②

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

より，グラフの頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

頂点が第3象限にあることから $-\frac{b}{2a}<0$ ……③，$-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ ……④

①，③より $b>0$　　①，④より $b^2-4ac>0$

以上より，$a>0$，$b>0$，$c>0$，$b^2-4ac>0$

これらを満たす a，b，c の組合せは $(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{2},\ 3,\ 3\right)$ (③)

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$ のまま，c の値だけを変化させると，頂点の x 座標 $-\dfrac{b}{2a}$ は変化せず，頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2}{4a}+c=c-\dfrac{9}{2}$ は変化する。

したがって，頂点は y 軸方向に移動する（②）

(3)　$b=3$，$c=3$ のまま，a の値だけを，グラフが下に凸の状態を維持するように，すなわち $a>0$ の範囲内で変化させると，

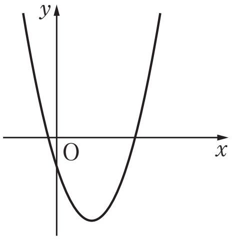
$a=\dfrac{b^2}{4c}$ つまり $b^2-4ac=0$ のとき，頂点の y 座標が 0 より，頂点は x 軸上にある（①）

$a\fallingdotseq\dfrac{b^2}{4c}$ つまり $b^2-4ac\fallingdotseq 0$ のとき，頂点は x 軸より上，または下にある。

また，頂点の x 座標は $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2a}<0$ より，頂点は y 軸より左側にある。

よって，頂点は第 2 象限と第 3 象限を移動する（⑤）

(4)　図 2 より，グラフは下に凸の放物線であるから $a>0$



また，y 切片は負より $c<0$

よって，a，c の値を変えずに b の値だけを変化させると

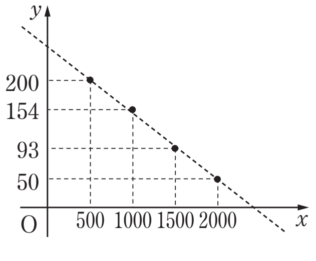
頂点の x 座標 $-\dfrac{b}{2a}$ は b の符号によって正，0，負のいずれにもなるが，頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2}{4a}+c$ は，$a>0$，$b^2\geqq 0$，$c<0$ より負である。

したがって，頂点が第 1 象限および第 2 象限には移動しない理由は

$a>0$，$c<0$ より，頂点の y 座標について，つねに $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$ となるからである。

3　(1)　(売上額)＝(T シャツ 1 枚の価格)×(販売数)……(＊)における「販売数」は，この問題においては累積人数(①)である。

T シャツ 1 枚の価格を x，販売数，すなわち累積人数を y とすると，表 1 の 4 組 $(x,\ y)$ は右図のように傾きが負の直線に沿って分布するように見える。よって，この直線を x と y の関



係を表すグラフとみなすと，y は x の1次関数（⑤）である。

売上額を $S(x)$ とおくと，$S(x)=x\times y=x\times(x$ の1次関数) より，$S(x)$ は x の2次関数(⑥)である。

(2)　表1を座標平面上にとった4点のうち，x の値が最小である点は (500，200)，最大の点は (2000，50)

この2点を通る直線の式の傾きは $\dfrac{50-200}{2000-500}=-\dfrac{1}{10}$

直線の式は $y=-\dfrac{1}{10}(x-500)+200$　　つまり $y=-\dfrac{1}{10}x+250$

このとき $S(x)=x\times\left(-\dfrac{1}{10}x+250\right)=-\dfrac{1}{10}x^2+250x$

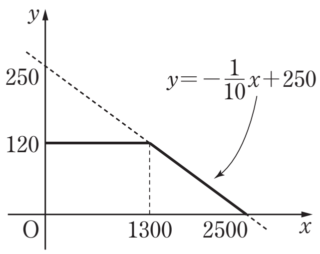
$$=-\frac{1}{10}(x-1250)^2+\frac{1250^2}{10}$$

よって，$S(x)$ が最大になる x は $x=1250$ であり，これは50の倍数である。

また，このとき $y=-\dfrac{1}{10}\cdot1250+250=125$

(3)　利益$=S(x)-400\times120$ より，売上額 $S(x)$ が最大になるとき，利益が最大となる。

ここで，Tシャツの製作枚数が120枚より，販売数 y の最大が120である。



$y=-\dfrac{1}{10}x+250$ より $y=120$ のとき $x=1300$

したがって，Tシャツ1枚の価格 x について

$0\leqq x\leqq1300$ のとき，$y=120$ であり，

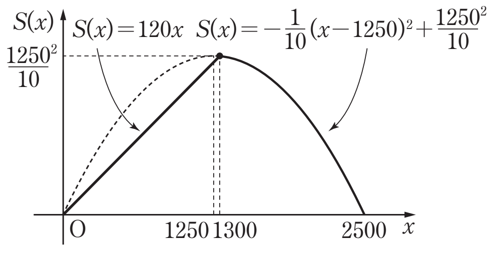
$S(x)=xy=x\cdot120=120x$

$1300\leqq x\leqq2500$ のとき，$S(x)=-\dfrac{1}{10}(x-1250)^2+\dfrac{1250^2}{10}$

($x\geqq2500$ のとき，$S(x)=0$)

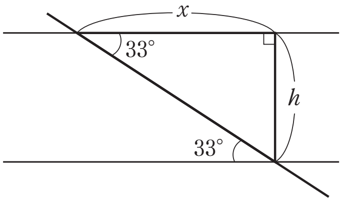
よって，$S(x)$ のグラフは右図より，$S(x)$ が最大となる x は $x=1300$ であり，これは50の倍数である。

したがって，利益が最大となるTシャツ1枚の価格は1300円



第３講　図形と計量

1　〔１〕 階段の傾斜が 33° のとき，踏面を x cm，蹴上げを h cm とすると



$\dfrac{h}{x}=\tan 33°$ より $h=x\tan 33°$

蹴上げが 18 cm 以下となるのは $x\tan 33° \leqq 18$

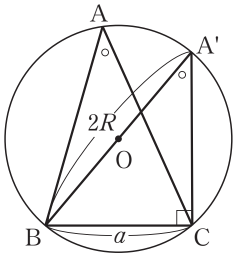
よって，$x \leqq \dfrac{18}{\tan 33°}$

建築基準法より，踏面は 26 cm 以上と定められているので $x \geqq 26$

したがって，x のとり得る値の範囲は $26 \leqq x \leqq \dfrac{18}{\tan 33°}$

〔２〕

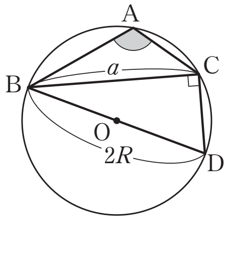
(1)　直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点(①)を A′ とすると，△A′BC に対して $C=90°$ の場合の考察の結果を利用することができ，$\dfrac{a}{\sin\angle \mathrm{CA'B}}=2R$ である。



これと，∠CAB＝∠CA′B より，$\dfrac{a}{\sin\angle \mathrm{CAB}}=2R$

つまり，△ABC において $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

(2)　△BCD において，$\sin\angle \mathrm{BDC}=\dfrac{a}{2R}$　(⑤)



四角形 ABDC は円 O に内接するから

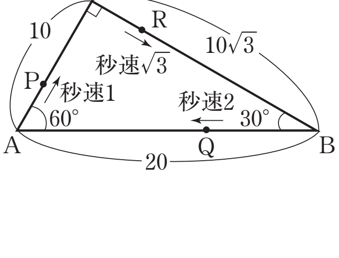
∠CAB＝180°－∠BDC　(⑤)

よって，$\sin\angle \mathrm{CAB}=\sin(180°-\angle \mathrm{BDC})=\sin\angle \mathrm{BDC}$

より △ABC において $\sin\angle \mathrm{CAB}=\dfrac{a}{2R}$

2　(1)　図１の △ABC において，AC＝10，BC＝$10\sqrt{3}$ である。

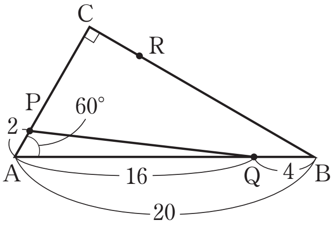
点 P は AC＝10 である辺 AC 上を点 A から点 C まで秒速１で移動する。



点 Q は BA＝20 である辺 BA 上を点 B から点 A まで，点 R は CB＝$10\sqrt{3}$ である辺 CB 上を点 C から点 B まで移動し，点 P，Q，R は同時

に移動を開始し，同時に到着することから，点Qの速さは秒速2，点Rの速さは秒速$\sqrt{3}$である。

(i)　各点が移動を開始して2秒後は，AP＝2，



BQ＝4であることよりAQ＝16

△APQで余弦定理を用いて

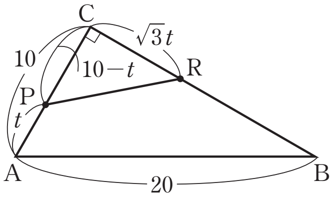
$$PQ^2=2^2+16^2-2\cdot2\cdot16\cdot\cos60^\circ$$

$$=2^2\left(1^2+8^2-2\cdot1\cdot8\cdot\frac{1}{2}\right)=2^2\cdot57$$

よって，$PQ=2\sqrt{57}$

また，△APQの面積Sについて，$S=\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot2\cdot\sin60^\circ=8\sqrt{3}$

(ii)　各点が移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$は，



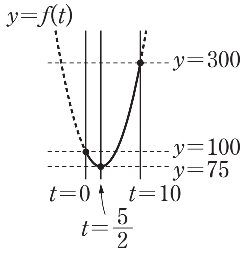
$AP=t$より$CP=10-t$，$CR=\sqrt{3}\,t$

△PCRで三平方の定理より

$$PR^2=(10-t)^2+\left(\sqrt{3}\,t\right)^2=4t^2-20t+100$$

$$=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+75$$

$PR^2=f(t)$とおくと，$0\leqq t\leqq10$における$y=f(t)$のグラフは右図。



⓪　$PR=5\sqrt{2}$のとき$PR^2=50$　よって，$PR=5\sqrt{2}$はとり得ない値である。

①　$PR=5\sqrt{3}$のとき$PR^2=75$　よって$PR=5\sqrt{3}$は一回だけとり得る値である。

②　$PR=4\sqrt{5}$のとき$PR^2=80$　よって$PR=4\sqrt{5}$は二回だけとり得る値である。

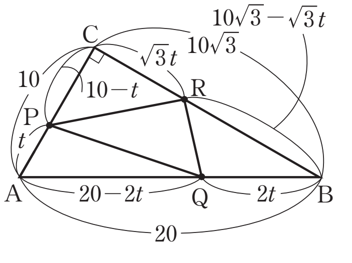
③　$PR=10$のとき$PR^2=100$　よって$PR=10$は二回だけとり得る値である。

④　$PR=10\sqrt{3}$のとき$PR^2=300$　よって$PR=10\sqrt{3}$は一回だけとり得る値である。

以上より　とり得ない値　⓪　　一回だけとり得る値　①，④

二回だけとり得る値　②，③

(iii)　各点が移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$は



$AP=t$より$PC=10-t$

$BQ=2t$より$QA=20-2t=2(10-t)$

$CR=\sqrt{3}\,t$より$RB=10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t$

$=\sqrt{3}(10-t)$

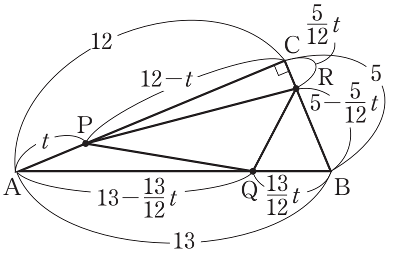
$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot 2(10-t)\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}(10-t)\cdot 2t\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot(10-t)\cdot\sqrt{3}\,t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$

(2)　各点が移動を開始して t 秒後 $(0\leqq t\leqq 12)$ は



$AP=t$ より $PC=12-t$

$BQ=\dfrac{13}{12}t$ より

$QA=13-\dfrac{13}{12}t=\dfrac{13}{12}(12-t)$

$CR=\dfrac{5}{12}t$ より $RB=5-\dfrac{5}{12}t=\dfrac{5}{12}(12-t)$

$\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\sin B=\dfrac{12}{13}$

(1)(iii)と同様に △APQ，△BQR，△CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\dfrac{13}{12}(12-t)\cdot\sin A=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{13}{12}t\cdot\dfrac{5}{12}(12-t)\cdot\sin B=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot(12-t)\cdot\dfrac{5}{12}t=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$ である。

また，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$ であることから，$\triangle PQR=12$ となるのは

$S_1+S_2+S_3=30-12=18$　すなわち $3\times\dfrac{5}{24}t(12-t)=18$ のときである。

$5t^2-60t+144=0$　　$t=\dfrac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}$ $(0\leqq t\leqq 12$ を満たす$)$

よって，$\dfrac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}$ 秒後

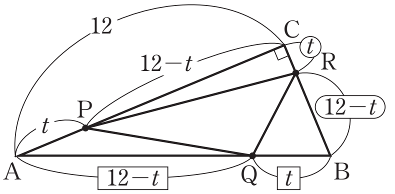
(別解)

$AP=t$，$PC=12-t$，$BQ=\dfrac{13}{12}t$，$QA=\dfrac{13}{12}(12-t)$，$CR=\dfrac{5}{12}t$，

$RB=\dfrac{5}{12}(12-t)$ より

AP：PC＝BQ：QA＝CR：RB＝t：$(12-t)$

(1)(iii)と同様に，△APQ，△BQR，△CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると



$$S_1=\triangle ABC\times\frac{AP}{AC}\times\frac{AQ}{AB}$$

$$=\triangle ABC\times\frac{t}{12}\times\frac{12-t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

$$S_2=\triangle ABC\times\frac{BQ}{BA}\times\frac{BR}{BC}=\triangle ABC\times\frac{t}{12}\times\frac{12-t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

$$S_3=\triangle ABC\times\frac{CP}{CA}\times\frac{CR}{CB}=\triangle ABC\times\frac{12-t}{12}\times\frac{t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$ である（以下略）

3 (1)　$A=60^\circ$，$B=90^\circ$ のとき，$C=30^\circ$

よって，$\cos B=\cos 90^\circ=0$ （⓪），$\sin C=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ （③）

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\cdot 0+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\sqrt{3}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=1$$

(2)　$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のとき，$C=107^\circ$

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ （④）より，$\sin C=\sin 107^\circ=\sin(180^\circ-73^\circ)=\sin 73^\circ$

$0<\sin 73^\circ<1$ より，選択肢⓪～③のうち，$\sin 73^\circ$ の値として適切なものは $\sin 73^\circ=0.9563$ （②）のみである。

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\times 0.9744^2+4\times 0.9563^2-4\times 1.732\times 0.9744\times 0.9563$$

$$=3.79782144+3.65803876-6.45564009$$

$$=1.00022011$$

小数第4位を四捨五入すると $X=1.000$

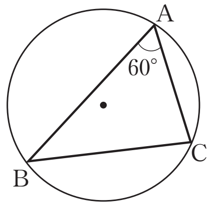
(3)　近似値を用いて計算し，かつ四捨五入した結果が $X=1$ になったに過ぎないので，$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のときに $X=1$ になることが証明できた，とする(a)は誤りである。

仮に，$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のときに $X=1$ になることが証明できたとしても，$A=60^\circ$ のときのすべての場合において証明できたことにはならない。よって，$A=60^\circ$ ならば $X=1$ という命題が真であると証明できた，とする(b)は誤りである。

したがって，(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいのは，下線部(a)，(b)ともに誤りで

ある（③）

(4) △ABC で正弦定理を用いて



$\dfrac{BC}{\sin A}=2R$ より $BC=2R\sin 60^\circ=2R\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=2R$ より $AB=2R\sin C$（⑤），

$AC=2R\sin B$（①）

(5) 直角三角形 ACH で，$\dfrac{AH}{AC}=\cos 60^\circ$ より，$AH=AC\cos 60^\circ$

直角三角形 BCH で，$\dfrac{BH}{BC}=\cos B$ より，$BH=BC\cos B$

$AB=AH+BH=AC\cos 60^\circ+BC\cos B$

$=2R\sin B\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}R\cos B$

よって，$AB=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B$ ……④

（③）　（⑤）

$X=1$，すなわち $4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$ であることを証明する。

④および $AB=2R\sin C$ より $2R\sin C=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B$

両辺を $R(\neq 0)$ で割って

$2\sin C=\sin B+\sqrt{3}\cos B$　すなわち $2\sin C-\sqrt{3}\cos B=\sin B$

両辺を 2 乗して

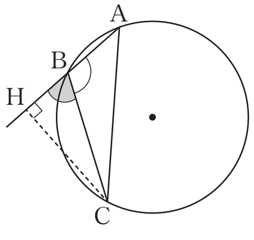
$4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C+3\cos^2 B=\sin^2 B$

両辺に $\cos^2 B$ を加えて

$4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C+4\cos^2 B=\sin^2 B+\cos^2 B$

ゆえに，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$ である。

(6) B が鈍角のとき，点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと，点 H は辺 AB 上にはない。これにより，下線部①には影響ないが，



下線部②は $BH=BC\cos\angle CBH$

$=BC\cos(180^\circ-B)$

$=-BC\cos B$

下線部③は $AB=AH-BH$

に，それぞれ修正が必要である。

このとき，$AB=AH-BH=AC\cos 60^\circ+BC\cos B$ となり，以下，B が鋭角のときと同様に $X=1$ であることが示される。

(7)　$A=120^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，$C=30^\circ$

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\cos^2 30^\circ+4\sin^2 30^\circ-4\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$=4(\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ)-4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=4\cdot 1-3=1$$

より，$A=120^\circ$，$B=30^\circ$ のとき $X=1$ となる。

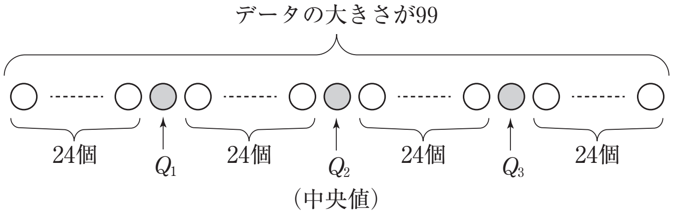
　$A=60^\circ$ ならば，B が 90°，鋭角，鈍角いずれの場合も $X=1$ であることが示されている（C は A，B が決まれば１つに決まる）ので，△ABC について，$p\Longrightarrow q$ は真である。

また，$A=120^\circ$ のときにも $X=1$ になることが示されているので，$p\Longleftarrow q$ は偽である。

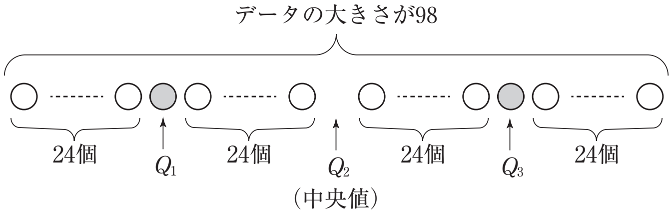
したがって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない（❷）

第４講 データの分析

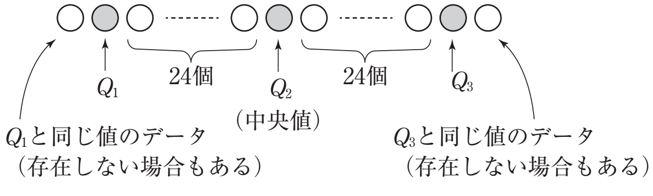
1 (1) データの大きさが 99 であるので，データを値の小さい順に並べたとき，50 番目の値が第 2 四分位数 Q_2 (中央値)である。また，1 番目から 49 番目までのデータの中央値，すなわち 25 番目の値が第 1 四分位数 Q_1 であり，51 番目から 99 番目までのデータの中央値，すなわち 75 番目の値が第 3 四分位数 Q_3 である。



③：最大値に等しい観測値を 1 個削除した残り 98 個のデータについて，第 2 四分位数 Q_2 (中央値)は 49 番目と 50 番目の値の平均値である。また，1 番目から 49 番目までのデータの中央値，すなわち 25 番目の値が第 1 四分位数 Q_1 であり，50 番目から 98 番目までのデータの中央値，すなわち 74 番目の値が第 3 四分位数 Q_3 である。よって，第 1 四分位数 Q_1 は変わらない。



⑤：範囲は，データの最大値と最小値の差である。Q_1 より小さい観測値と，Q_3 より大きい観測値をすべて削除すると，残りのデータの範囲は Q_3-Q_1 である。これは，もとのデータの四分位範囲に等しい。



以上より，どのようなデータでも成り立つものは③と⑤である。

(2) (Ⅰ)：P10 の四分位範囲は 1 より大きいので誤り。

(Ⅱ)：P10 の中央値より P11 の中央値が小さいので誤り。

(Ⅲ)：P1 の最大値は 79.5 より小さく，P47 の最小値は 81.0 より大きい。よって

正しい。

以上より，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは⑥

(3) 最小値が 79.5 歳以上 80.0 歳未満で，最大値が 81.5 歳以上 82.0 歳未満である箱ひげ図は④または⑤

データを値の小さい順に並べたとき，データの大きさが 20 より，中央値は 10 番目の値と 11 番目の値の平均であり，第 1 四分位数は 5 番目の値と 6 番目の値の平均である。図 2 より，6 番目の値は 80.0 歳以上 80.5 歳未満の階級に属するので，図 2 のヒストグラムに対応する箱ひげ図は④

(4) 図 3 の 5 本の直線はそれぞれ，男女の平均寿命の差が 5.5，6.0，6.5，7.0，7.5 の点の集合である。

図 3 より，差が 7.0 から 7.5 の間に 3 個のデータがあり，ヒストグラムで該当するのは③

2 (1) 変量 x の 2 つのデータについて，

平均値 $\overline{x}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}=1.50$ (⑧)

分散 $S_x{}^2=\dfrac{(-0.5)^2+(0.5)^2}{2}=(0.5)^2$

標準偏差 $S_x=\sqrt{S_x{}^2}=\sqrt{(0.5)^2}=0.50$ (⑥)

変量 y の 2 つのデータについても，平均値 $\overline{y}=1.50$，標準偏差 $S_y=0.50$ である。

また，x と y の共分散は $S_{xy}=\dfrac{(-0.5)\times0.5+0.5\times(-0.5)}{2}=-0.25$

よって，x と y の相関係数は $r=\dfrac{S_{xy}}{S_xS_y}=\dfrac{-0.25}{0.5\times0.5}=-1$ (①)

(2) $(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 2)$ のとき，$\overline{y}=2$，$S_y=\sqrt{\dfrac{0^2+0^2}{2}}=0$ より，

変量 y の標準偏差の値が 0 であるから(③)，相関係数 $r=\dfrac{S_{xy}}{S_xS_y}$ の計算において分母が 0 になり，相関係数が計算できない。

(3) ②：$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 2)$ のとき，相関係数の値は 1.00 となる。よって，②は誤り

(4) 相関係数の値はあくまで散布図の点が，直線に沿って分布する(④)程度を表している。

値の組の個数が 2 のとき，相関係数の値が 1.00，-1.00，計算できない，の 3 通りに限られるのは，平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にある(③)からである。

散布図において，上記の異なる2点を通る直線の傾きが正であれば，相関係数の値は1.00であり，直線の傾きが負であれば，相関係数の値は −1.00である。また，2点が同一か，2点を通る直線が座標軸と平行になる場合は，相関係数は計算できない。

3 (1) 観光客数 (x) と消費総額 (y) の間に強い正の相関があるので，相関係数に最も近い値は選択肢④

(2) 消費額単価 $=\dfrac{\text{消費総額}}{\text{観光客数}}$ つまり $\dfrac{y}{x}$ である。よって，各県を表す点と原点を通る直線の傾きが最も大きい点を選べばよい。

(3) (2)の考え方を用いると，消費額単価が最も高い県を表す点は⑧である。

(4) ⓪：図2の上の箱ひげ図では，同一の県における県内と県外の比較ができないため，この結論には至らない。よって誤り。

①：⓪と同様，図2の下の箱ひげ図からは，この結論には至らない。よって，誤り。

②：図3において，県内と県外の観光客の消費額単価が等しい点を結んだ直線を考えると，それより上側の領域，つまり県外の方が県内より多い県が44県中4分の3以上ある。よって正しい。

③：図3において，北海道，鹿児島県，沖縄県の3県は，県外からの観光客の消費額単価が高い方から数えて上位3県であるから，この3県を除いた41県の平均値は，この3県を含む44県の平均値より小さい。よって正しい。

④：図3において，北海道，鹿児島県，沖縄県の3県を除いた41県の分布は，横軸方向の広がりに比べて縦軸方向の広がりの方が大きい。したがって，県内の方よりも県外の方が消費額単価の分散が大きいため，誤り。

(5) ⓪：必ずしも正しくない。

①：負の相関は見られない。

②：正の相関は見られるが，因果関係があるとはいえない。

③：行祭事・イベントの開催数が最も多い県について，約145回開催して約6,500千人の観光客数であり，1回当たりの観光客数が6,000千人を超えてはいない。

④：正の相関が見られるので，正しい。

第５講　場合の数と確率

1〔1〕

⓪：$p=1-$(5 回とも裏が出る確率)$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

$=0.96\cdots\cdots>0.95$　よって正しい。

①：赤球と白球の個数が不明なので，確率は定まらない。よって誤り。

②：5 枚から 2 枚を取り出す方法は ${}_5C_2=10$(通り)。書かれた文字が同じ場合は，「ろ」2 枚，「は」2 枚を取り出すときで，2 通り。よって，書かれた文字が異なる確率は $1-\frac{2}{10}=\frac{4}{5}$　よって正しい。

③：出た面を見た 2 体がともに「オモテ」と発言するのは

(i)　コインが表で，2 体のロボットともに正しく「オモテ」と発言する

(ii)　コインが裏で，2 体のロボットともに正しく発言せず「オモテ」と発言する

の場合である。よって，出た面を見た 2 体がともに「オモテ」と発言したときに，実際に表が出ている条件付き確率は

$$p=\frac{0.9\times0.9}{0.9\times0.9+0.1\times0.1}=\frac{0.81}{0.82}=\frac{81}{82}=0.98\cdots\cdots>0.9$$　よって誤り。

したがって，正しい記述は⓪と②

〔2〕

(1)　コインを 2 回投げ終わって

持ち点が -2 点であるのは，裏，裏と出る場合で，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

持ち点が 1 点であるのは，表，裏または裏，表と出る場合で，その確率は

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{1}{2}$

(2)　表が出る回数を x 回，裏が出る回数を y 回とすると，持ち点が 0 点となるのは

$2x-y=0$ より $y=2x$

これを満たす自然数 x，y $(1\leqq x\leqq5,\ 1\leqq y\leqq5)$ は，$x=1$，$y=2$

よって，持ち点が再び 0 点になるのは，コインを $1+2=3$(回)投げ終わったとき。

したがって，コインを 3 回投げ終わって持ち点が 0 点になる確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

(3)　表が出る回数を x 回，裏が出る回数を y 回とすると，持ち点が 4 点となるのは

$$2x-y=4 \text{ より } y=2x-4$$

これを満たす自然数 x，y（$1\leqq x\leqq 5$，$1\leqq y\leqq 5$）は，$x=3$，$y=2$

よって，持ち点が 4 点になるのは，表が 3 回，裏が 2 回出るときであるが，このうち最初の 3 回が表 1 回，裏 2 回の組合せであるものは，3 回投げ終わった時点で持ち点が 0 点となり終了する。

よって，ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点となる場合の数は

$${}_5C_2-{}_3C_1=10-3=7\text{(通り)}$$

したがって，求める確率は $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{32}$

(4)　(3)の 7 通りについて，表が出る事象を○，裏が出る事象を×とすると，1 回目から 5 回目の表裏の出方は右の①～⑦のようになる。

このうち，2 回投げ終わって持ち点が 1 点であるのは，④～⑦の 4 通り。

したがって，求める条件付き確率は $\frac{4}{7}$

①　○○○××
②　○○×○×
③　○○××○
④　○×○○×
⑤　○×○×○
~~○××○○~~
⑥　×○○○×
⑦　×○○×○
~~×○×○○~~
~~××○○○~~

2　(1)　箱 A：くじ 100 本中，当たりくじ 10 本

箱 B：くじ 100 本中，当たりくじ 5 本

$$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}=\frac{1}{20}$$

$$P(B\cap W)=P(B)\cdot P_B(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}=\frac{1}{40}$$

よって，$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\frac{3}{40}$

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{40}}=\frac{2}{3}$$

また，$P_W(B)=1-P_W(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

よって，1 番目の人が当たりくじを引いた後，同じ箱から 2 番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{4}{99}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{99}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{99}=\frac{2}{27}$$

1番目の人が当たりくじを引いた後，異なる箱から2番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{5}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{10}{100}=\frac{1}{15}$$

$\frac{2}{27}=\frac{10}{3\cdot3^2\cdot5}>\frac{9}{3\cdot5\cdot3^2}=\frac{1}{15}$ より，1番目の人が当たりくじを引いた後，2番目の人は，1番目の人と同じ箱からくじを引いた方が当たる確率が高い。

(2)　箱Ａ：くじ100本中，当たりくじ10本

箱Ｂ：くじ100本中，当たりくじ7本

$$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\frac{1}{20}$$

$$P(B\cap W)=P(B)\cdot P_B(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{100}=\frac{7}{200}$$

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{1}{20}+\frac{7}{200}=\frac{17}{200}$$

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{10}{200}}{\frac{17}{200}}=\frac{10}{17},\quad P_W(B)=1-P_W(A)=1-\frac{10}{17}=\frac{7}{17}$$

よって，1番目の人が当たりくじを引いた後，同じ箱から2番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{6}{99}=\frac{10}{17}\times\frac{9}{99}+\frac{7}{17}\times\frac{6}{99}=\frac{4}{51}$$

1番目の人が当たりくじを引いた後，異なる箱から2番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{7}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{10}{17}\times\frac{7}{100}+\frac{7}{17}\times\frac{10}{100}=\frac{7}{85}$$

$\frac{4}{51}=\frac{20}{17\cdot3\cdot5}<\frac{21}{17\cdot5\cdot3}=\frac{7}{85}$　より，1番目の人が当たりくじを引いた後，2番目の人は，1番目の人と異なる箱からくじを引いた方が当たる確率が高い。

(3)　箱Ｂの当たりくじが5本のときは，(1)より同じ箱を選ぶべきであり，箱Ｂの当たりくじが7本のときは，(2)より異なる箱を選ぶべきである。

箱Ｂの当たりくじが6本のとき

$$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\frac{1}{20}$$

$$P(B\cap W)=P(B)\cdot P_B(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{100}=\frac{3}{100}$$

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{1}{20}+\frac{3}{100}=\frac{8}{100}$$

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{5}{100}}{\frac{8}{100}}=\frac{5}{8},\ P_W(B)=1-P_W(A)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

よって，1番目の人が当たりくじを引いた後，同じ箱から2番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{5}{99}=\frac{5}{8}\times\frac{9}{99}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{99}=\frac{5}{66}$$

1番目の人が当たりくじを引いた後，異なる箱から2番目の人がくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{6}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{5}{8}\times\frac{6}{100}+\frac{3}{8}\times\frac{10}{100}=\frac{3}{40}$$

$\frac{5}{66}=\frac{100}{2\cdot33\cdot20}>\frac{99}{2\cdot20\cdot33}=\frac{3}{40}$ より，1番目の人が当たりくじを引いた後，2番目の人は，1番目の人と同じ箱からくじを引いた方が当たる確率が高い。

以上より，①

3 すべての道路に渋滞中の表示がない場合の確率は以下

調査日	地点	台数	選択した道路	台数	確率
5月10日	A	1183	①	1092	$1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$
			④	91	$\frac{1}{13}$
5月11日	C	1008	②	882	$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
			⑦	126	$\frac{126}{1008}=\frac{1}{8}$
5月12日	E	496	⑤	248	$\frac{1}{2}$
			⑥	248	$\frac{1}{2}$

(1) すべての道路に渋滞中の表示がない場合，A地点の分岐において①を選択する確率は

$$\frac{12}{13}$$

(2) すべての道路に渋滞中の表示がない場合

A→C→Dと進む場合の確率は $\frac{12}{13}\times\frac{7}{8}=\frac{21}{26}$

A→E→D と進む場合の確率は $\frac{1}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{26}$

よって，A 地点から B 地点に向かう車が D 地点を通過する確率は

$$\frac{21}{26}+\frac{1}{26}=\frac{11}{13}$$

(3) A 地点から B 地点に向かう車で D 地点を通過した車が，E 地点を通過していた確率は，(2)より

$$\frac{\frac{1}{26}}{\frac{11}{13}}=\frac{1}{22}$$

(4) ①の道路にのみ渋滞中の表示がある場合，A 地点から B 地点に向かう車が D 地点を通過するとき，

A 地点から C 地点に向かう確率は $\frac{12}{13}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{13}$ より，

A→C→D と進む場合の確率は $\frac{8}{13}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{13}$

A 地点から E 地点に向かう確率は $1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}$ より，

A→E→D と進む場合の確率は $\frac{5}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{26}$

よって，A 地点から B 地点に向かう車が D 地点を通過する確率は

$$\frac{7}{13}+\frac{5}{26}=\frac{19}{26}$$

(5) すべての道路に渋滞中の表示がない場合，①を通過する台数は

$1560\times\frac{12}{13}=1440$(台)

①に渋滞中の表示を出した場合，①を通過する台数は

$1560\times\frac{12}{13}\times\frac{2}{3}=1440\times\frac{2}{3}=960$(台)

(6) 各道路の通過台数が 1000 台を超えないようにするためには，①に渋滞中の表示を出すことが必要であり，このとき(5)より A 地点から C 地点に向かう車は 960 台，A 地点から E 地点に向かう車は $1560-960=600$(台)である。

②に渋滞中の表示を出さない場合（選択肢⓪，①）

⑦に渋滞中の表示を出しているので，C 地点から直接 B 地点に向かう台数は

$960\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}=80$(台)

よって，C 地点から D 地点に向かう車は $960-80=880$(台)である。

選択肢⓪の場合

⑤に渋滞中の表示を出しているので，E 地点から D 地点に向かう車は

$600 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 200$(台)

よって，③の通過台数は $880 + 200 = 1080$(台)となり，1000 台を超えるため不適。

選択肢①の場合

⑥に渋滞中の表示を出しているので，E 地点から D 地点に向かう車は

$600 - 200 = 400$(台)

よって，③の通過台数は $880 + 400 = 1280$(台)となり，1000 台を超えるため不適

②に渋滞中の表示を出す場合（選択肢②，③）

C 地点から D 地点に向かう車は $960 \times \frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = 560$(台)

選択肢②の場合

⑤に渋滞中の表示を出しているので，E 地点から D 地点に向かう車は 200 台

よって，③の通過台数は $560 + 200 = 760$(台)となる。

選択肢③の場合

⑥に渋滞中の表示を出しているので，E 地点から D 地点に向かう車は 400 台

よって，③の通過台数は $560 + 400 = 960$(台)となる。

以上より，各道路の通過台数が 1000 台を超えない範囲で，①，②，③をそれぞれ通過する台数の合計を最大にするには，渋滞中の表示を③のようにすればよい。

第６講　整数の性質

1 (1)　$x=2.\dot{3}\dot{6}$ のとき

$100\times x-x=236.\dot{3}\dot{6}-2.\dot{3}\dot{6}$　つまり $99x=236-2$

ゆえに $x=\dfrac{234}{99}=\dfrac{26}{11}$

(2)　$y=2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ のとき

$49\times y-y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}-2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$　つまり $48y=2ab_{(7)}-2_{(7)}$

$48y=2\times7^2+a\times7^1+b\times7^0-2$

ゆえに　$y=\dfrac{96+7\times a+b}{48}$

(i)　$2<y<3$ であること，また y は分母が 4，分子が奇数の分数であることから，

y は $\dfrac{9}{4}$ または $\dfrac{11}{4}$ に限られる。

$y=\dfrac{11}{4}$ のとき　$\dfrac{96+7\times a+b}{48}=\dfrac{11}{4}$ より $7\times a+b=36$

これを満たす整数 a，b $(0\leqq a\leqq6,\ 0\leqq b\leqq6)$ は $a=5$，$b=1$

(ii)　$y-2=\dfrac{7a+b}{48}$ であるから，$\dfrac{7a+b}{48}$ は，分子が 1 で分母が 2 以上の整数の分数であり，$7a+b$ は 48 の正の約数のうち，48 を除く数である。

よって，$7a+b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24$

したがって $(a,\ b)=(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 6),\ (1,\ 1),\ (1,\ 5),$
$(2,\ 2),\ (3,\ 3)$

このうち，a と b が異なる整数であるのは

$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 6),\ (1,\ 5)$ の 6 個である

2 (1)　皿 A に Mg の物体 X と 8g の分銅を 1 個，皿 B に 3g の分銅を $3+2=5$(個)のせると天秤ばかりが釣り合ったので

$M+8\times1=3\times5$　　よって $M=7$

また，$3\times5+8\times(-1)=M$ より，$x=5$，$y=-1$ は方程式 $3x+8y=M$ の整数解の 1 つである。

(2)　$M=1$ のとき，皿 A に 1g の物体 X と 8g の分銅を y 個，皿 B に 3g の分銅を 3 個のせると天秤ばかりが釣り合うとすると　$1+8\times y=3\times3$ より $y=1$

したがって　$1+8\times1=3\times3$

両辺 M 倍して $M+8\times M=3\times 3M$

よって，M がどのような自然数であっても，皿Aに物体Xと 8g の分銅 M 個(➊)をのせ，皿Bに 3g の分銅 $3M$ 個(➍)をのせることで釣り合う。

(3)　$M=20$ のとき，皿Aに 20g の物体Xと 3g の分銅 p 個を，皿Bに 8g の分銅 q 個をのせたところ，天秤ばかりが釣り合ったので

$$20+3\times p=8\times q \qquad \text{つまり } 3p=4(2q-5)$$

3と4は互いに素であるから，p は4の倍数。

よって，自然数 p のうち最小のものは $p=4$　　このとき　$20+3\times 4=8\times q$ より $q=4$ となる。

したがって，自然数の組 $(p,\ q)$ で p の値が最小であるものは $p=4,\ q=4$

この結果より $20+3\times 4=8\times 4$　すなわち $3\times(-4)+8\times 4=20$ ……①

また，$3x+8y=20$ ……②

②−①より $3(x+4)+8(y-4)=0$　つまり $3(x+4)=8(-y+4)$

3と8は互いに素であるから，$x+4$ は8の倍数であり，整数 n を用いて

$$x+4=8n$$

と表すことができる。このとき，$3\cdot 8n=8(-y+4)$

したがって，$x=-4+8n,\ y=4-3n$ と表される。

(4)　$M=7$ のとき

⓪：$7+3x=14y$ を満たす整数解の1つに，$x=7,\ y=2$ がある。

　よって，皿Aに 7g の物体Xと 3g の分銅を7個，皿Bに 14g の分銅を2個のせると釣り合う。

➊：$7+3x=21y$ より $3(-x+7y)=7$　　左辺は3の倍数であるが，右辺は7であり，矛盾する。

　よって，3g と 21g の組み合わせで釣り合うことはない。

➋：$7+8x=14y$ より $2(-4x+7y)=7$　　左辺は2の倍数であるが，右辺は7であり，矛盾する。

　よって，8g と 14g の組み合わせで釣り合うことはない。

➌：$7+8x=21y$ を満たす整数解の1つに，$x=7,\ y=3$ がある。

　よって，皿Aに 7g の物体Xと 8g の分銅を7個，皿Bに 21g の分銅を3個のせると釣り合う。

　したがって，分銅をどのようにのせても天秤ばかりが釣り合わない分銅の質量の組み合わせは ➊，➋

(5)　皿Aには物体Xのみをのせ，皿Bには 3g の分銅 x 個と 8g の分銅 y 個をのせ

たとき，天秤ばかりが釣り合うとすると $M=3x+8y$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在する。

$y=0$ のとき　$M=3x=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \cdots\cdots$ となり，M は 3 以上かつ 3 の倍数であればよい。

$y=1$ のとき　$M=3x+8=3(x+2)+2=8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ \cdots\cdots$ となり，M は 8 以上かつ 3 で割ると 2 余る数であればよい。

$y=2$ のとき　$M=3x+16=3(x+5)+1=16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ \cdots\cdots$ となり，M は 16 以上かつ 3 で割ると 1 余る数であればよい。

以上より，測ることができる M は

$M=3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ \cdots\cdots$

であり，測ることができない M は $M=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 10,\ 13$ の 7 通りあり，そのうち最も大きい値は 13

M が 13 より大きい整数，つまり 14 以上の整数であれば，0 以上の整数 $x,\ y$ を用いて $M=3x+8y$ の形で表される。

$M=3x+2018y$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在するときを考える。

$y=0$ のとき　$M=3x$ より，M は 3 以上かつ 3 の倍数であればよい。

$y=1$ のとき　$M=3x+2018=3(x+672)+2$ より，M は 2018 以上かつ 3 で割ると 2 余る数であればよい。

$y=2$ のとき　$M=3x+4036=3(x+1345)+1$ より，M は 4036 以上かつ 3 で割ると 1 余る数であればよい。

M が 4036 より小さい，かつ 3 で割ると 1 余る数のうち，最も大きい数である 4033 が求める最大値である。

3 (1)　$n=8$ のとき，A は上から 6 行目，左から 3 列目であるから，A は積 $6\times3=18$ を 8 で割った余り 2

上から 5 行目には，$5\times1,\ 5\times2,\ 5\times3,\ 5\times4,\ 5\times5,\ 5\times6,\ 5\times7$，すなわち 5，10，15，20，25，30，35 を 8 で割った余り 5，2，7，4，1，6，3 が左から順に並ぶ。よって，1 が書かれているのは左から 5 列目。

(2)　n が素数，すなわち 1 と自身以外に約数を持たない数のとき，$2\leqq k\leqq n-1$，$2\leqq \ell\leqq n-1$ を満たす整数 $k,\ \ell$ を用いて $n=k\ell$ と表すことはできない。よって，n が素数ならば，方盤のいずれのマスにも 0 が現れない。

したがって，n が素数であることは，方盤のいずれのマスにも 0 が現れないための十分条件である。

「方盤いずれのマスにも 0 が現れないならば n が素数である」……(∗)ことを示す。

n が素数でないとき，$2 \leqq k \leqq n-1$，$2 \leqq \ell \leqq n-1$ を満たす整数 k，ℓ を用いて $n=k\ell$ と表すことができる。

これは，上から k 行目，左から ℓ 列目のマスが 0 であることを表している。

よって，(∗)の対偶である「n が素数でないならば，方盤のいずれかのマスに 0 が現れる」が真であることから，(∗)も真である。したがって，n が素数であることは，方盤のいずれのマスにも 0 が現れないための必要条件である。

以上より，方盤いずれのマスにも 0 が現れないための必要十分条件は，n が素数であること(③)である。

※⓪，②：$n=9$　　①：$n=15$　　④，⑤：$n=4$　　のとき，それぞれマスに 0 が現れる。

(3)(i)　$n=56$ のとき，上から 27 行目，左から ℓ $(1 \leqq \ell \leqq 55)$ 列目の数が 1 であるとすると，27ℓ を 56 で割った余りが 1 であることから

$27\ell=56m+1$　　つまり　　$27\ell-56m=1$(⓪)（m は整数)が成り立つ。

(ii)　互除法により　$1=27-2\times13$

$=27-(56-27\times2)\times13$

$=27\times27-56\times13$

$$
\begin{array}{r}
13 \\
2\overline{)\,27} \\
\underline{26} \\
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2 \\
\overline{)\,56} \\
\underline{54} \\
2
\end{array}
$$

つまり　$27\times27-56\times13=1$

これは方程式 $27\ell-56m=1$ の解の 1 つが $\ell=27$，$m=13$ であることを表している。

したがって，方盤の上から 27 行目に並ぶ数のうち，1 は左から 27 列目にある。

(4)(i)　$n=56$ のとき，上から 24 行目，左から ℓ 列目の数が 0 であるための必要十分条件は，24ℓ が 56 の倍数，

つまり　$24\ell=56m$ を満たす整数 m が存在すること，すなわち $3\ell=7m$ より，ℓ が 7 の倍数であることである。

$1 \leqq \ell \leqq 55$ より，$\ell=7$，14，21，28，35，42，49

よって，上から 24 行目には 0 が 7 個ある。

(ii)　$n=56$ のとき，上から k 行目，左から ℓ 列目の数が 0 であるための必要十分条件は，$k\ell$ が 56 の倍数，

つまり　$k\ell=56m$ を満たす整数 m が存在することである。

0 の個数が最も多くなるのは，$k\ell=56m$ を満たす整数 ℓ の個数が最も多くなるときであり，k が，56 を除く最も大きい約数になるときである。

$56=2^3\cdot 7$ より，$k=2^2\cdot 7=28$

したがって，0 の個数が最も多いのは上から 28 行目である。

このとき，$28\ell=56m$ より $\ell=2m$　すなわち ℓ が 2 の倍数であり，その個数は $\ell=2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 54$ の 27 個である。

(5)　$n=56$ のとき，上から k 行目，左から ℓ 列目の数が r であるとすると

$k\ell=56m+r$　$(1\leqq k\leqq 55,\ 1\leqq \ell\leqq 55,\ r$ は整数$)$

これを満たす ℓ を考える

⓪：$k=5,\ r=0$ のとき $5\ell=56m$　　この式を満たす $\ell,\ m$ は存在しない。

①：$k=6,\ r=0$ のとき $6\ell=56m$　つまり $3\ell=28m$

この式を満たす $\ell,\ m$ として，$\ell=28,\ m=3$ がある。よって，正しい。

②：$k=9,\ r=1$ のとき $9\ell=56m+1$　つまり $9\ell-56m=1$

この式を満たす $\ell,\ m$ として，$\ell=25,\ m=4$ がある。よって，正しい。

③：$k=10,\ r=1$ のとき $10\ell=56m+1$　つまり $2(5\ell-28m)=1$

この式を満たす $\ell,\ m$ は存在しない。

④：$k=15,\ r=7$ のとき $15\ell=56m+7$　つまり $15\ell=7(8m+1)$

この式を満たす $\ell,\ m$ として，$\ell=49,\ m=13$ がある。よって，正しい。

⑤：$k=21,\ r=7$ のとき $21\ell=56m+7$　つまり $3\ell-8m=1$

この式を満たす $\ell,\ m$ として，$\ell=3,\ m=1$ がある。よって，正しい。

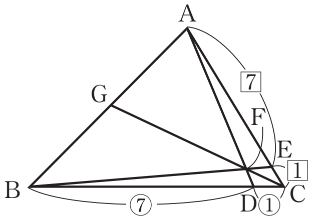
以上より，正しいものは①，②，④，⑤

第７講　図形の性質

1　△ABC について，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}=1 \qquad \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=1 \qquad \text{よって}\ \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}=1$$

△ADC と直線 BE について，メネラウスの定理より



$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1 \qquad \frac{8}{7}\cdot\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{7}{1}=1$$

$$\text{よって}\ \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{1}{8}$$

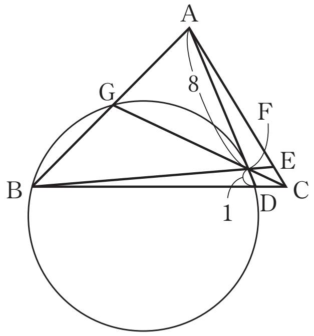
△GCB と直線 AD について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AG}}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}=1 \qquad \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{1}{7}=1 \qquad \text{よって}\ \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\frac{2}{7}$$

$$\triangle\mathrm{CDG}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GF}}\times\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{9}{7}\times\frac{1}{8}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{9}{56}$$

$$\text{よって}\ \frac{\triangle\mathrm{CDG}}{\triangle\mathrm{BFG}}=\frac{9}{56}$$

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD＝1 のとき FA＝8



AG＝x とすると，方べきの定理により

AG・AB＝AF・AD

$x\cdot 2x=8\cdot 9$

$2x^2=72$　　$x^2=36$　　よって $x=6$

したがって AB＝$2x$＝12

さらに，AE＝$3\sqrt{7}$ のとき

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{AE}\cdot\frac{8}{7}\mathrm{AE}=\frac{8}{7}\cdot\left(3\sqrt{7}\right)^2=72$$

AE・AC＝AG・AB(＝72) より，方べきの定理の逆から，4 点 B，C，E，G は同一円周上にある。

したがって，円に内接する四角形の性質より ∠AEG＝∠ABC（❷）

2 (1) 線分 AX 上に BX＝B′X となる点 B′ をとり，B と B′ を結ぶ。

AX＝BX＋CX ⟺ AB′＋B′X＝BX＋CX ⟺ AB′＝CX

より，AX＝BX＋CX を示すには，AB′＝CX を示せばよく，

AB′＝CX を示すには，△ABB′≡△CBX を示せばよい。
(⓪)　(⑦)

BX＝B′X，∠BXA＝∠BCA＝60° より，△BB′X は正三角形である。

△ABB′ と △CBX において

AB＝CB（正三角形 ABC の辺）

∠BAB′＝∠BCX（弧 BX の円周角）

また，∠ABB′＝∠ABC−∠B′BC＝60°−∠B′BC

∠CBX＝∠B′BX−∠B′BC＝60°−∠B′BC より

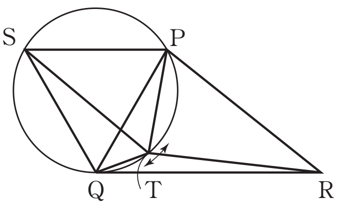
∠ABB′＝∠CBX

よって，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ABB′≡△CBX

(2)(i) △PSQ の外接円の弧 PQ 上に点 T をとると，

問題 1 の結果より PT＋QT＝ST（⑤）

よって，PT＋QT＋RT＝ST＋RT

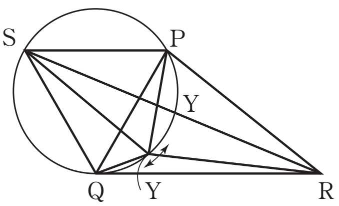


(ii)(iii)

点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にあるとき

PY＋QY＋RY＝SY＋RY≧SR

（等号成立は，線分 SR 上に点 Y があるとき）



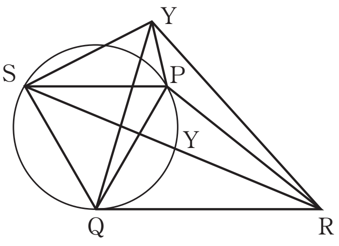
点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にないとき

定理 より PY＋QY＞SY

よって，PY＋QY＋RY＞SY＋RY≧SR より

PY＋QY＋RY＞SR

（等号成立は，線分 SR 上に点 Y があるとき）

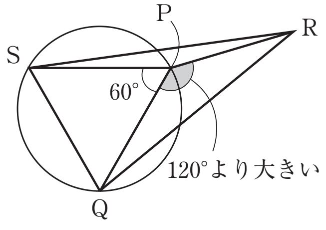


よって，**問題 2** の点 Y は，点 S と点 R を通る直線と弧 PQ との交点になる。
(③)　(②)　(③)

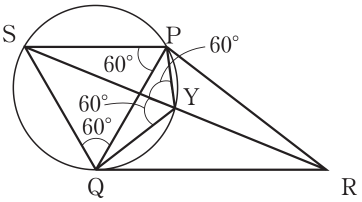
(iv) ∠QPR が 120°（④）より

大きいときは，点 S と点 R を

通る直線と弧 PQ が交わらない。



(v)　$\angle$QPR が 120° より小さいとき



$\angle QYS=\angle QPS=60^\circ$

(弧 QS に対する円周角)

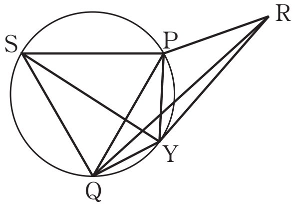
$\angle PYS=\angle PQS=60^\circ$

(弧 PS に対する円周角)

より，点 Y は，$\angle PYR=\angle QYP=\angle RYQ=120^\circ$

となる点である（③）

$\angle$QPR が 120° より大きいとき



点 Y が $\triangle$PSQ の外接円の弧 PQ 上にあるとき

$PY+QY+RY=SY+RY\geqq SP+RP$

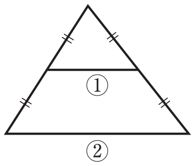
(等号成立は，点 Y が点 P と一致するとき)

点 Y が $\triangle$PSQ の外接円の弧 PQ 上にないとき

$PY+QY+RY>SP+RP$

よって，PY＋QY＋RY が最小となる点 Y は，点 Y が点 P と一致するとき，すなわち三角形 PQR の三つの辺のうち，もっとも長い辺を除く二つの辺 PQ，PR の交点である（⑥）

3　(1)　(i)(ii)中点連結定理(③)より，四角形 FHJG の各辺の長さは，いずれも正四面体 ABCD の 1 辺の長さの $\dfrac{1}{2}$ 倍(③)であるから，4 辺の長さが等しくなる。



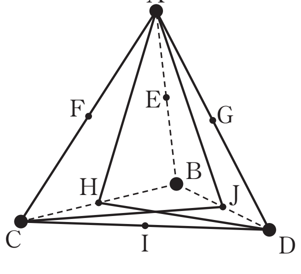
(2)(i)　四角形において

4 辺の長さが等しい $\Longrightarrow$ 正方形　は偽（反例：四角形が正方形ではないひし形）

4 辺の長さが等しい $\Longleftarrow$ 正方形　は真

よって，四角形において，4 辺の長さが等しいことは正方形であるための必要条件であるが十分条件でない（⓪）

(ii)　$\triangle$AJC と $\triangle$AHD において



AJ＝AH，CJ＝DH (合同な正三角形の中線)

AC＝AD (正三角形 ACD の辺の長さ)

より，3 辺の長さがそれぞれ等しいので，

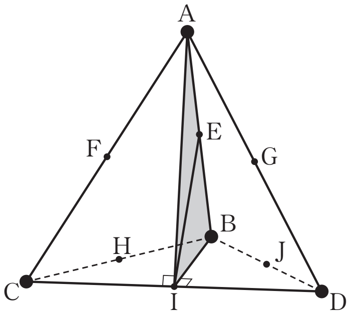
$\triangle AJC\equiv\triangle AHD$

(②)　　(③)

(iii) △AJC と △AHD は合同な二等辺三角形(①)で，点 F，G はそれぞれ辺 AC，AD の中点であることから，FJ＝GH

よって，四角形 FHJG は，4 辺の長さが等しく対角線の長さが等しいので，正方形である。

(3) ①を用いると，平面 AIB 上にある直線 AI，BI が点 I で交わっていて，点 I を通り平面 AIB 上にない直線 CD が直線 AI, BI に垂直であるから，平面 AIB⊥直線 CD である。



さらに②を用いると，平面 AIB と直線 CD が点 I で交わっていて，平面 AIB⊥直線 CD であるから, 平面 AIB 上の点 I を通るすべての直線 m に対して, 直線 CD⊥直線 m である。

直線 EI は平面 AIB 上にあり，かつ点 I を通る直線であるので，直線 CD⊥直線 EI である。

⓪は，(a)から(b)を導く過程で用いられていない。

③は命題として正しくない。

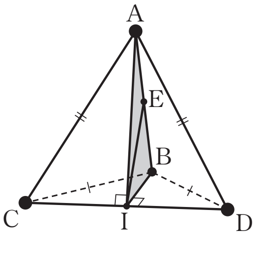
④は，(a)から(b)を導く過程で用いられていない。

以上より，(a)から(b)を導く過程で用いる性質として正しいものは，①，②である。

(4) 太郎さんが考えた条件について考える。

AC＝AD，BC＝BD のとき，△ACD，△BCD は二等辺三角形であるから，中線 AI，BI に関して AI⊥CD，BI⊥CD である。

よって，(3)より下線部(b)が常に成り立つ。



花子さんが考えた条件について考える。

△ABC と △BAD において，

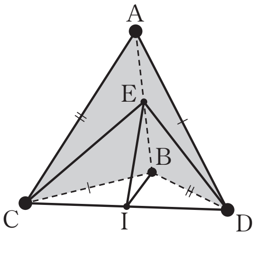
BC＝AD，AC＝BD，AB＝BA

より，3 辺の長さがそれぞれ等しいので，

△ABC≡△BAD である。

よって，△ECD は EC＝ED の二等辺三角形である。

したがって下線部(b)が常に成り立つ。



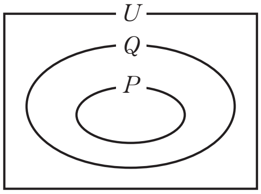
以上より，太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても常に成り立つ（⓪）

第８講　実践演習問題 第１問

第１問

〔１〕

⑴　実数全体の集合を U，条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とすると，$p \Longrightarrow q$ が真であることから，右図のようなベン図となり，$\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$ (⓪)および $\overline{\mathrm{P}} \supset \overline{\mathrm{Q}}$ (⑤)が成り立つ。



⑵　条件 r は満たすが，条件 s は満たさない例(反例)が存在すれば命題 $r \Longrightarrow s$ は偽である。

条件 r：$xy<4$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は $(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$ のみであり，

このうち，$x+y \leqq 3$ を満たさないものは $(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ である。

よって，命題 $r \Longrightarrow s$ は偽であり，反例は $(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ のみ。

条件 s：$x+y \leqq 3$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は $(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ のみ。

これらはすべて条件 r を満たすことから，命題 $s \Longrightarrow r$ は真。

したがって，r であることは s であるための必要条件であるが十分条件ではない(①)

〔２〕

⑴　$y=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ よりグラフの頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$$

グラフより軸は負なので，$-\dfrac{a}{2}<0$　すなわち，$a>0$ つまり a は正（⓪）

また，y 切片は負なので，$b<0$　つまり b は負（②）

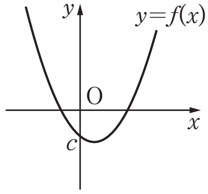
グラフは x 軸と異なる２点で交わるので，頂点の y 座標は負であることから，

$-\dfrac{a^2}{4}+b<0$　すなわち $a^2-4b>0$ つまり a^2-4b は正（⓪）

$a+b+1$ は，$y=x^2+ax+b$ において $x=1$ のときの y 座標であり，
グラフよりそれは正である。したがって，$a+b+1$ は正（⓪）

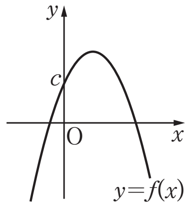
(2)　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となり，これがすべての象限を通るためには，グラフが右図1のようになればよいので，軸の正負にかかわらず，$f(0)<0$ であればよい。したがって，$c<0$（⑤）

図1



このとき，右図1のように頂点の y 座標は必ず負になる。
$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるので，第3象限と第4象限は必ず通る。よって，グラフがすべての象限を通るためには，右図2のようになればよいので，軸の正負にかかわらず，$f(0)>0$ であればよい。
したがって，$c>0$（④）
このとき，右図2のように頂点の y 座標は必ず正になる。

図2

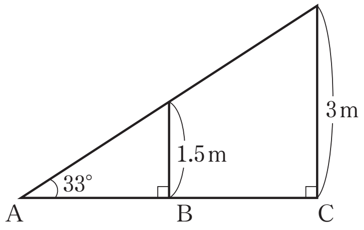


〔3〕

地点Aから生垣のある地点Cまでの距離ACについて，

$\dfrac{3}{\mathrm{AC}}=\tan 33°$ より $\mathrm{AC}=\dfrac{3}{\tan 33°}$

相似な図形を考えて，



$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1.5:3=1:2$ より $\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}$

よって，$\mathrm{BC}=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}=\mathrm{AC}-\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{3}{2\tan 33°}$ (m)

〔4〕

(1)　$A=90°$ のとき $\cos A=\cos 90°=0$（⓪）

(2)　三角比の定義から

$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\cos A$ より $\mathrm{AH}=b\cos A$（②）

$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}}=\sin A$ より $\mathrm{CH}=b\sin A$（⑤）

したがって，$\mathrm{BH}=c-b\cos A$

よって，△BCH において三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2$

$=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$

ゆえに $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。

(3) $\sin(180°-A)=\sin A$ (⓪)

$\cos(180°-A)=-\cos A$ (③)

を利用すると,

$\mathrm{AH}=b\cos(180°-A)=-b\cos A$ (⑨)

$\mathrm{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$ (④)

となるので,△BCH において三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2$

$=(\mathrm{BA}+\mathrm{AH})^2+\mathrm{CH}^2$

$=(c-b\cos A)^2+(b\sin A)^2$

$=c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$

ゆえに $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となる。

第9講　実践演習問題 第2問

第2問 〔1〕

(1)　△ABC において正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}$$

$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{6}{\sin B}$$

$$\sin B=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{3\sqrt{3}}{x}$$

となる。

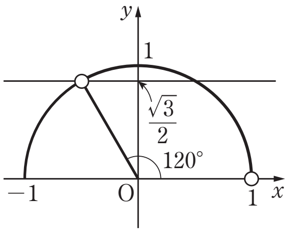
$x=3\sqrt{3}$ のとき，$\sin B=1$ より $B=90^\circ$ となり，$C=30^\circ$，$c=3$ となることから，△ABC はただ一つに決まる。

また，∠A＝60° であり，三角形の内角の和が 180° であることから，$0^\circ<B<120^\circ$ である。

よって，$\sin B \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{x}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x>0$ より $\dfrac{x}{3}\geqq 2$



したがって $x\geqq 6$ のとき △ABC はただ一つに決まる。

(2)(i)　△ABC に余弦定理を用いると，

$$x^2=6^2+t^2-2\cdot 6\cdot t\cdot\cos 60^\circ$$
$$=36+t^2-6t$$

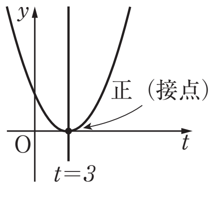
よって $t^2-6t+36-x^2=0$（①）

(ii)　t の値が正の数でただ1つに決まれば，辺 AB の長さが1つに決まる。

よって，t の 2 次方程式 $t^2-6t+36-x^2=0$ が，正の解を 1 つだけもてばよい（②）

(iii)　さらに，$f(t)=t^2-6t+36-x^2$ とおき，$f(t)=0$ の判別式を D として，$f(t)=0$ が正の解を 1 つだけもつための条件を考える。 $f(t)=(t-3)^2-x^2+27$

より，グラフの軸は $t=3>0$

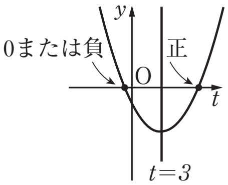


よって，$D=0$（①），すなわち放物線 $y=f(t)$ の頂点の y

座標が0であれば，2次方程式 $f(t)=0$ は正の重解をもち，条件を満たす。

このとき，$-x^2+27=0$　　$x>0$ より　$x=3\sqrt{3}$

また，グラフの軸が $t=3>0$ であることより，$f(0)\leqq 0$（⑨）であれば，2次方程式 $f(t)=0$ は正の解と，0または負の解を1つずつもち，条件を満たす。



このとき，$f(0)=36-x^2\leqq 0$　　$(x-6)(x+6)\geqq 0$

$x>0$ より $x\geqq 6$

〔2〕

(1)　数学の点数の平均値は

$$\frac{1}{10}(7+8+9+10+11+12+13+15+17+18)=12(\text{点})$$

数学の点数の分散は

$$\frac{1}{10}\{(7-12)^2+(8-12)^2+(9-12)^2+(10-12)^2+(11-12)^2+(12-12)^2+(13-12)^2+(15-12)^2+(17-12)^2+(18-12)^2\}$$

$=12.6$

(2)　正しい散布図は　②

(3)　正しい散布図は　⓪

(4)　生徒10人の変更前の英語の点数をそれぞれ y_1，y_2，……，y_{10}，平均値を $\overline{y}$ とすると，英語の点数の分散は　$Y=\frac{1}{10}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\cdots\cdots+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$

さらに，英語の各点数に5点を加点した後の英語の点数の分散は

$$Y'=\frac{1}{10}\left[\left\{y_1+5-\left(\overline{y}+5\right)\right\}^2+\left\{y_2+5-\left(\overline{y}+5\right)\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{y_{10}+5-\left(\overline{y}+5\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\cdots\cdots+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$$

$$=Y$$

より，$\frac{Y'}{Y}=1$（①）

同様に，生徒10人の変更前の数学の点数をそれぞれ x_1，x_2，……，x_{10}，平均値を $\overline{x}$ とすると，数学の点数の分散は

$$X=\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)^2\right\}$$

さらに，数学の各点数を5倍して5点加えた後の数学の点数の平均値は，$5\overline{x}+5$

点であるので，変更後の数学の点数の分散は

$$X'=\frac{1}{10}\left[\left\{5x_1+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2+\left\{5x_2+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{5x_{10}+5-\left(5\overline{x}+5\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left\{5\left(x_1-\overline{x}\right)\right\}^2+\left\{5\left(x_2-\overline{x}\right)\right\}^2+\cdots\cdots+\left\{5\left(x_{10}-\overline{x}\right)\right\}^2\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left\{25\left(x_1-\overline{x}\right)^2+25\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots\cdots+25\left(x_{10}-\overline{x}\right)^2\right\}$$

$$=25\cdot\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)^2\right\}$$

$$=25X$$

より，$\dfrac{X'}{X}=25$（❸）

変更前の英語と数学の点数の共分散は

$$A=\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

変更後の英語と数学の点数の共分散は

$$A'=\frac{1}{10}\left\{5\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+5\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+5\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

$$=5\times\frac{1}{10}\left\{\left(x_1-\overline{x}\right)\left(y_1-\overline{y}\right)+\left(x_2-\overline{x}\right)\left(y_2-\overline{y}\right)+\cdots+\left(x_{10}-\overline{x}\right)\left(y_{10}-\overline{y}\right)\right\}$$

よって，$\dfrac{A'}{A}=5$（❷）

(5)　1人転出しても平均値が変わらないので，転出した生徒は数学・英語ともに平均値と同じ点数。

よって，転出した生徒は⑥の生徒である。

該当の生徒が転校する前の10人の生徒の英語の点数の分散は

$$Y=\frac{1}{10}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$$

該当の生徒が転校した後の9人の生徒の英語の点数の分散は

$$Y''=\frac{1}{9}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\right\}$$

であるが，$y_6=\overline{y}$，すなわち $y_6-\overline{y}=0$ より

$$Y''=\frac{1}{9}\left\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2\right.$$

$$+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\Big\}$$

$$=\frac{10}{9}\times\frac{1}{10}\Big\{\left(y_1-\overline{y}\right)^2+\left(y_2-\overline{y}\right)^2+\left(y_3-\overline{y}\right)^2+\left(y_4-\overline{y}\right)^2+\left(y_5-\overline{y}\right)^2$$

$$+\left(y_6-\overline{y}\right)^2+\left(y_7-\overline{y}\right)^2+\left(y_8-\overline{y}\right)^2+\left(y_9-\overline{y}\right)^2+\left(y_{10}-\overline{y}\right)^2\Big\}$$

$$=\frac{10}{9}Y$$

したがって，$\dfrac{Y''}{Y}=\dfrac{10}{9}$ が成り立つ。

第10講　実践演習問題 第3問〜第5問

第3問

(1)　2回戦で優勝者が決まるのは1回戦で勝った者が2回戦も勝ったときなので，2回戦で優勝者となることができるのは，1回戦に出場しているAまたはB(③)である。

また，2回戦で優勝者が決まるのは，1回戦からAが2連勝またはBが2連勝するときで，その確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

である。

(2)　AとBが対戦することを $(A,\ B)$ のように表し，対戦の勝者を $\boxed{A}$ のように□で囲んで表すとする。

3回戦で優勝者が決まるのは，対戦を1回戦 ⟹ 2回戦 ⟹ 3回戦の順に表すと，

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(B,\ \boxed{C})\quad\text{または}\quad(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(A,\ \boxed{C})$$

の2通りのみであり，3回戦で優勝者となれるのはCのみ(②)である。

その確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

である。

また，1回戦で優勝者が決まることはない。よって，(1)の結果と合わせて，3回戦以内に優勝者が決まる確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(3)　4回戦まで試合が続くのは，(2)と同様に表すと

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(A,\ B)$$

$$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(A,\ B)$$

の2通りのみであり，4回戦は必ずAとBの対戦となり，Cは出場できない(②)

また，4回戦で優勝者が決まるのは，

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(A,\ \boxed{B})$$

$$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(\boxed{A},\ B)$$

のいずれかの場合であり，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

（別解）(2)より，3回戦以内に優勝者が決まらない確率は $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

このとき，4回戦で優勝者が決まる確率は，3回戦の勝者にかかわらず $\frac{1}{2}$

である。したがって，求める確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(4) (3)より，4回戦は必ずAとBの対戦となり，これは1回戦と同じである。

よって，5回戦で優勝者が決まっていない場合に，6回戦で対戦する2人を考えるのは，2回戦で優勝者が決まらず，3回戦目で対戦する2人を考えるのと同じである。

対戦を1回戦 ⟹ 2回戦 ⟹ 3回戦の順に表すと，(2)より

$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(B,\ C)$ または $(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(A,\ C)$

であるから，①または②である。

また，5回戦が終了しても優勝者が決まらない確率は，

$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$

(5) (1)～(3)より，Aが4回戦以内に優勝できるのは2回戦か4回戦。4回戦で優勝者が決まっていない場合は，次にAが優勝できるのは5回戦である。

2回戦で優勝するとき

$(\boxed{A},\ B)\to(\boxed{A},\ C)$ であり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

4回戦で優勝するとき

$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(\boxed{A},\ B)$ であり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

5回戦で優勝するとき，

$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(\boxed{A},\ B)\to(\boxed{A},\ C)$ であり，その確率は，

$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

したがって，5回戦以内にAが優勝者と決まる確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$

また，5回戦以内にBが優勝する確率は，同様に $\frac{11}{32}$ である。

さらに，5回戦が終了しても優勝者が決まらない確率は，(4)より $\frac{1}{16}$ である。

したがって，5回戦以内にCが優勝する確率は　$1-\left(\frac{11}{32}+\frac{11}{32}+\frac{1}{16}\right)=\frac{8}{32}$

ゆえに，5回戦以内に優勝する確率が最も高いのはA，B(③)である。

第４問

(1)　新商品Bの売れた個数は，新商品Cの売れた個数の2倍より1個少ないので，

$y=2z-1$(①)と表せる。

①：$5x+3y+z=263$ に $y=2z-1$ を代入すると，

$$5x+3(2z-1)+z=263$$

よって，$5x+7z=266$（①）

(2)　$5x+7z=266$ より $7(z-38)=5\times(-x)$

5と7は互いに素(①)であるから，$z-38$ は5の倍数(④)である。

よって，整数 k を用いて，$z-38=5k$ すなわち $z=5k+38$ と表すことができる。

このとき，$7\cdot5k=5\times(-x)$ より $x=-7k$ と表すことができる。

(3)　(1)より $y=2z-1$

よって，商品の売れた個数を x，z のみを用いて表すと

$$x+y+z=x+(2z-1)+z=x+3z-1\text{（個）}$$（④）

さらに x，z は $5x+7z=266$ を満たす自然数であり，(2)より $x=-7k$，すなわち x は7の倍数であることより，

$(x,\ z)=(7,\ 33),(14,\ 28),(21,\ 23),(28,\ 18),(35,\ 13),(42,\ 8),(49,\ 3)$

に限られる。

このとき

$x+3z-1$ の値が最大になるのは $(x,\ z)=(7,\ 33)$ のときで，

このとき　$y=2\cdot33-1=65$

$x+3z-1$ の値が最小になるのは $(x,\ z)=(49,\ 3)$ のときで，

このとき　$y=2\cdot3-1=5$

したがって，新商品A，B，Cの売れた合計の個数が

最も大きいとき $x=7$，$y=65$，$z=33$

最も小さいとき $x=49$，$y=5$，$z=3$

となる。

第５問

(1)

(i) 円周角と中心角の関係を用いて，

$\angle BPC = 2 \times \angle BAC$ (④)

すなわち，$\angle BPC = 2 \times 70° = 140°$

四角形 ARPQ について，$\angle ARP = \angle AQP = 90°$，$\angle RAQ = 70°$ であるから，

$\angle RPQ = 360° - (90° + 90° + 70°) = 110°$

角の二等分線の性質から，

$$\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - \angle BAC)$$

より，$\angle BPC = 180° - \frac{1}{2}(180° - 70°) = 180° - 55° = 125°$

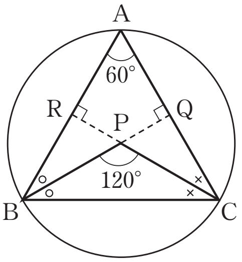
(ii) このとき，

$$\angle BPC = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A + 90°\ (②)$$

が成立している。

(iii) (A)…140°，(B)…110°，(C)…125° より，(A)＞(C)＞(B) (④)

(iv) 点 P が △ABC の外心のとき　$\angle BPC = 2 \times \angle BAC$



点 P が △ABC の内心のとき　$\angle BPC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$

点 P が △ABC の垂心のとき

$\angle RPQ = 360° - (90° + 90° + \angle BAC)$

$= 180° - \angle BAC$ より

$\angle BPC = 180° - \angle BAC$

△ABC の外心と内心が一致するとき，$2 \times \angle BAC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$ より

$\angle BAC = 60°$，$\angle BPC = 120°$

このとき，$\angle BPC = 180° - \angle BAC$ が成立し，点 P は △ABC の垂心である。

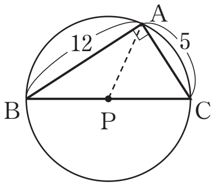
また，PB＝PC，$\angle BPC = 120°$ より，△BPC は PB＝PC の二等辺三角形である。

よって，$\angle PBC = \angle PCB = 30°$ であり，$\angle ABC = \angle ACB = 60°$ である。

したがって，△ABC が正三角形(③)のとき，△ABC の外心，内心，垂心がすべて一致し，$\angle BPC = 120°$ (⑥)である。

(2)　$\angle A=90^\circ$，$AB=12$，$AC=5$ より，三平方の定理から

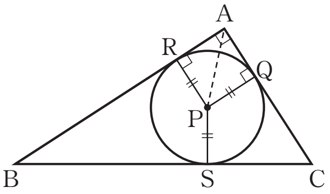
$BC=13$



(i)　点 P が △ABC の外心のとき，$\angle BAC=90^\circ$ であることから，辺 BC が △ABC の外接円の直径であり，点 P は直角三角形 ABC の斜辺の中点(⑥)である。

よって，$AP=BP=CP=\frac{1}{2}BC=\frac{13}{2}$ (②)

点 P が △ABC の垂心であるとき，点 P は頂点 A(⑤)と一致し，$AP=0$ (⓪)である。



点 P が △ABC の内心のとき，$PR\perp AB$,

$PQ\perp AC$ かつ $PQ=PR$ より

四角形 ARPQ は正方形である。

その 1 辺を r とすると，$AR=AQ=r$,

$CQ=CS=5-r$，$BR=BS=12-r$ であるから

$(5-r)+(12-r)=13$

$2r=4$

$r=2$ (③)

また，AP は正方形 ARPQ の対角線である。

よって，$AP=PQ\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (④)

(ii)　したがって，AP の長さは

❶のとき，$\frac{13}{2}=6.5$　　❷のとき，0　　❸のとき，$2\sqrt{2}=\sqrt{8}=2.\cdots\cdots$

よって，(E)＜(F)＜(D) (①)